

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

FONDEMENTS DIDACTIQUES
POUR UNE INTERVENTION ORTHOPÉDAGOGIQUE
SUR LA NOTION DE FRACTION

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR
VIRGINIE HOULE

AVRIL 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier très chaleureusement ma directrice de thèse, Jacinthe Giroux, dont la contribution à ce projet est inestimable. Mille mercis, Jacinthe, pour tes rétroactions rapides et constructives, pour ta grande disponibilité et, également, pour nos nombreuses discussions, dont le contenu a souvent largement débordé celui de la thèse. J'ai eu la chance immense d'être initiée à la recherche par une femme passionnée, engagée et expérimentée, pour qui j'ai d'ailleurs une estime sans bornes. Je ne pourrai jamais assez te remercier, Jacinthe, pour tout ce que tu m'as apporté.

Je remercie vivement, aussi, mon codirecteur de thèse, Gustavo Barallobres. Ce fut une chance inouïe d'être accompagnée par un chercheur à la fois si modeste et si compétent. Merci, Gustavo, pour ton calme réconfortant et pour tes commentaires pertinents et précis, qui ont alimenté mes réflexions tout au long du projet.

Je tiens de plus à exprimer très sincèrement ma gratitude à Monsieur Denis Tanguay, président du jury, pour la finesse de ses commentaires, tant sur le fond que sur la forme, qui ont grandement contribué à bonifier cette thèse.

Je transmets également mes sincères remerciements aux écoles qui m'ont accueillie, aux enseignants qui m'ont confié leurs élèves et aux élèves avec lesquels j'ai eu un réel plaisir à travailler. Merci pour la confiance que vous m'avez accordée.

Sur une note plus personnelle, je remercie ma famille et mes amis, qui ont assuré le soutien affectif de cette thèse. Ma reconnaissance va également à mes deux adorables enfants, Maëva et Olivier, nés durant cette belle aventure. M'arrêter pour prendre soin d'eux, jouer et rire avec eux, a été pour moi une belle et grande source d'énergie. Enfin, je tiens à remercier mon conjoint, Simon, qui croit en moi plus que quiconque et qui m'a soutenue tout au long de ce projet, dont la durée a largement dépassé celle prévue. Merci du fond du cœur pour ta joie de vivre contagieuse, ton sens de l'humour et ton optimisme. Tu m'as aidée plus que tu ne peux l'imaginer.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
RÉSUMÉ	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
LA PRATIQUE ORTHOPÉDAGOGIQUE	4
1.1 L'orthopédagogie.....	4
1.2 Bref historique de l'orthopédagogie au Québec.....	7
1.3 Contenu de la formation en orthopédagogie	9
1.3.1 Stages	10
1.3.2 Projets d'intégration	10
1.3.3 Cours disciplinaires et didactiques	11
1.3.4 Cours à caractère transversal.....	11
1.3.5 Cours à caractère psychologique.....	12
1.3.6 Cours à option	12
1.3.7 Résumé.....	12
1.4 Dispositifs professionnels façonnant l'identité des orthopédagogues.....	14
1.4.1 Association des orthopédagogues du Québec	14
1.4.2 Documents produits par le ministère de l'Éducation	16
1.4.3 Discussion	19
CHAPITRE II	
LES DIFFICULTÉS D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES	22
2.1 La dyscalculie de la neuropsychologie	22
2.1.1 Définition et critères diagnostiques.....	23
2.1.2 Prévalence et dyscalculie pure <i>versus</i> dyscalculie avec comorbidités	24
2.1.3 Manifestations de la dyscalculie	25

2.2	Les difficultés d'apprentissage en mathématiques selon la psychologie cognitive ..	26
2.2.1	Fonctions cognitives impliquées dans l'apprentissage des mathématiques ..	26
2.2.2	Psychologie cognitive et intervention en mathématiques	29
2.3	Les difficultés d'apprentissage en mathématiques selon une perspective didactique	30
2.3.1	Prise en compte du contexte dans lequel se déroulent les apprentissages.....	31
2.3.2	Mise à l'épreuve des situations didactiques dans le contexte de l'adaptation scolaire	37
 CHAPITRE III		
	PROBLÉMATISATION ET OBJECTIFS DE RECHERCHE	48
3.1	Rôle de l'orthopédagogue : tension entre les cadres de référence cognitiviste et didactique	48
3.2	Intervention en mathématiques : ce qu'offrent les thèses de la neuropsychologie, de la psychologie cognitive et de la didactique	50
3.3	Objectifs de recherche.....	54
 CHAPITRE IV		
	CADRE THÉORIQUE SUR LA FRACTION	56
4.1	Les nombres rationnels	56
4.2	Les cinq interprétations de la fraction.....	58
4.2.1	Fraction partie/tout	58
4.2.2	Fraction mesure	62
4.2.3	Fraction rapport	64
4.2.4	Fraction quotient	67
4.2.5	Fraction opérateur	70
4.2.6	Recoupements entre les différentes interprétations.....	72
4.2.7	Conclusion	73
4.3	Acquisition de la notion de fraction.....	74
4.3.1	Partition sans traitement multiplicatif	75
4.3.2	Coordination partielle des connaissances sur les structures multiplicatives et des connaissances sur les fractions	77

4.3.3	Coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et les connaissances sur les fractions	78
4.3.4	Les fractions en tant que nombres.....	81
4.4	Modèles d'enseignement de la fraction.....	81
4.4.1	Modèle d'enseignement de Streefland	82
4.4.2	Modèle d'enseignement de Brousseau.....	85

CHAPITRE V

MÉTHODOLOGIE.....	90
5.1 Conditions didactiques retenues.....	90
5.1.1 Conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension adidactique	91
5.1.2 Conditions relatives à la décontextualisation des connaissances	93
5.1.3 Conditions spécifiques à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions	94
5.2 Présentation de la séquence.....	96
5.2.1 Situation sur la fraction en tant que partie d'un tout continu	96
5.2.2 Situation sur la fraction en tant que mesure	105
5.2.3 Situation sur la fraction en tant que rapport	113
5.2.4 Situation sur la fraction en tant que partie d'un tout collection et en tant qu'opérateur	121
5.2.5 Conclusion	128
5.3 Opérationnalisation	128
5.4 Instrumentation	130
5.4.1 Collecte des données	130
5.4.2 Analyse des données	131
5.5 Démarche éthique	135

CHAPITRE VI

PROFIL DE PERFORMANCES DES ÉLÈVES AVANT ET APRÈS LA SÉQUENCE

D'ENSEIGNEMENT	136
6.1 Performances des élèves au prétest sur la fraction	136
6.1.1 Les faits multiplicatifs.....	138
6.1.2 La relation multiplicative partie/tout.....	139
6.1.3 La résolution de problèmes	141
6.1.4 La fraction comme nombre	144
6.2 Performances des élèves sélectionnés à l'entretien d'évaluation.....	148
6.2.1 Tâche sur les codes oraux et écrits des fractions.....	148
6.2.2 Tâche sur les faits multiplicatifs.....	148
6.2.3 Tâche sur le pliage de bandes de papier (structures multiplicatives)	149
6.2.4 Tâche sur la résolution de problèmes reposant sur l'équation $n \times a/b = x$	149
6.2.5 Tâche sur la comparaison de rapports	152
6.3 Conclusion concernant les performances des élèves sélectionnés avant la séquence d'enseignement	154
6.4 Confrontation des performances au prétest et au posttest	155
6.4.1 Analyse en fonction des questions et de leur catégorie d'appartenance	155
6.4.2 Analyse en fonction des élèves et de leur groupe d'appartenance	159

CHAPITRE VII

ANALYSE A POSTERIORI DE LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT.....

7.1 Analyse de la situation sur la fraction en tant que partie d'un tout continu	163
7.1.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes	163
7.1.2 Validation interne de la première situation	165
7.2 Analyse de la situation sur la fraction en tant que mesure	183
7.2.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes	184
7.2.2 Validation interne de la deuxième situation	186
7.3 Analyse de la situation sur la fraction en tant que rapport	215
7.3.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes	215
7.3.2 Validation interne de la troisième situation	218

7.4	Analyse de la situation sur la fraction en tant que partie d'un tout collection et en tant qu'opérateur	233
7.4.1	Activités réalisées auprès de chacun des groupes	233
7.4.2	Validation interne de la quatrième situation	235

CHAPITRE VIII

DISCUSSION	255
8.1 Conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension adidactique	255
8.1.1 Conditions relatives aux caractéristiques du milieu	256
8.1.2 Conditions portant sur le pilotage de situations à dimension adidactique...	263
8.2 Conditions relatives à la décontextualisation des connaissances	270
8.2.1 Présentation de situations variées.....	271
8.2.2 Présentation de moments de décontextualisation tout au long de la séquence	273
8.2.3 Utilisation d'un langage précis centré sur le savoir en jeu.....	277
8.3 Conditions spécifiques à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions.....	278
8.3.1 L'équivalence des fractions et les interprétations de la fraction selon le modèle de Kieren	279
8.3.2 L'équivalence des fractions et la structure multiplicative de la fraction	285
8.3.3 Le passage codes oraux/codes écrits des fractions	287
8.4 Conclusion.....	289

CHAPITRE IX

CONCLUSION.....		291
9.1	Intervention en mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage	291
9.2	Identification de conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.....	295
9.3	Limites méthodologiques.....	297
9.4	Quelques perspectives de recherches.....	299

ANNEXE A COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « STAGES » SELON LES UNIVERSITÉS.....	304
ANNEXE B COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « PROJETS D'INTÉGRATION » SELON LES UNIVERSITÉS	305
ANNEXE C COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « COURS DISCIPLINAIRES ET DIDACTIQUES » SELON LES UNIVERSITÉS	306
ANNEXE D COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « COURS À CARACTÈRE TRANSVERSAL » SELON LES UNIVERSITÉS	307
ANNEXE E COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « COURS À CARACTÈRE PSYCHOLOGIQUE » SELON LES UNIVERSITÉS	308
ANNEXE F COURS S'INSCRIVANT DANS LA CATÉGORIE « COURS À OPTION » SELON LES UNIVERSITÉS	309
ANNEXE G MATÉRIEL DE LA PREMIÈRE SITUATION	310
ANNEXE H PRÉTEST ET POSTTEST	323
ANNEXE I PROTOCOLE D'ENTRETIEN	337
ANNEXE J FORMULAIRE DE CONSENTEMENT	343
ANNEXE K RÉPONSES DES ÉLÈVES À LA QUESTION 1 DU PRÉTEST EN FONCTION DE LEUR CLASSE D'APPARTENANCE	346
ANNEXE L FRÉQUENCE ET POURCENTAGE DE RÉUSSITE AUX ITEMS DE LA QUESTION 15 DU PRÉTEST EN FONCTION DES TROIS GROUPES-CLASSES ET DES ÉLÈVES SÉLECTIONNÉS	347

ANNEXE M	
FRÉQUENCE ET POURCENTAGE DE RÉUSSITE AUX ITEMS DE LA	
QUESTION 2 DU PRÉTEST EN FONCTION DES TROIS GROUPES-CLASSES ET	
DES ÉLÈVES SÉLECTIONNÉS	348
ANNEXE N	
FRÉQUENCE ET POURCENTAGE DE RÉUSSITE AUX ITEMS DE LA	
QUESTION 3 DU PRÉTEST EN FONCTION DES TROIS GROUPES CLASSES ET	
DES ÉLÈVES SÉLECTIONNÉS	349
ANNEXE O	
EXTRAIT DE VERBATIM TIRÉ DU GROUPE AS ILLUSTRANT LES	
DIFFICULTÉS RELATIVES À LA DÉCONTEXTUALISATION DES	
CONNAISSANCES AU MOMENT DE LA TROISIÈME SITUATION	350
BIBLIOGRAPHIE.....	352

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
4.1 Diagramme permettant d'illustrer l'équivalence de différents rapports	83
5.1 Problème portant sur la comparaison de rapports (tiré de Lamon, 2008)	119
5.2 Confrontations réalisées selon le premier plan d'analyse	133
7.1 Raisonnement de E6 conduisant à la mesure 5/6 à la tâche A du scénario 1 de la deuxième situation.....	191
7.2 Schéma utilisé par l'expérimentatrice pour aider les élèves à solutionner un problème lors de la deuxième situation.....	211

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1	Nombre de crédits accordés en fonction des catégories de cours 13
4.1	Étapes dans l'acquisition de la notion de fraction selon différents modèles..... 75
5.1	Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la première situation 97
5.2	Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la deuxième situation 106
5.3	Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la troisième situation 114
5.4	Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la quatrième situation 123
6.1	Pourcentage de réussite des élèves aux questions du prétest en fonction des catégories établies 137
6.2	Nombre d'élèves obtenant une réponse juste à chacun des items de la tâche 5 de l'entretien 153
6.3	Nombre d'élèves ayant réussi chacune des questions en fonction de leur catégorie d'appartenance au prétest et au posttest 156
6.4	Nombre d'items réussis au prétest et au posttest en fonction de leur catégorie d'appartenance pour chacun des élèves sélectionnés 160
7.1	Répartition du temps de chacune des situations de la séquence pour les trois groupes d'élèves..... 162
7.2	Répartition du temps de chacune des activités de la situation 1 pour les trois groupes d'élèves..... 163
7.3	Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 1 166
7.4	Répartition du temps de chacune des activités de la situation 2 pour les trois groupes d'élèves..... 185
7.5	Conduites adoptées par les élèves à chacun des messages formulés pour les trois segments du scénario 1 de la situation 2 188
7.6	Conduites adoptées par les élèves au scénario 2 de la situation 2..... 201

7.7	Répartition du temps de chacune des activités de la situation 3 pour les trois groupes d'élèves.....	216
7.8	Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 3.....	219
7.9	Répartition du temps de chacune des activités de la situation 4 pour les trois groupes d'élèves.....	234
7.10	Conduites adoptées par les élèves du groupe AS à l'activité d'introduction de la situation 4.....	235
7.11	Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 4.....	240
8.1	Hypothèses concernant les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur l'équivalence des fractions	290

RÉSUMÉ

Au Québec, le titre d'« orthopédagogue » est attribué aux enseignants détenant un baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale qui n'ont pas de classe à leur charge. Ces enseignants ont comme mandat d'aider les élèves en difficulté en français et/ou en mathématiques. Pour ce faire, ils travaillent généralement à l'extérieur de la classe en regroupant des élèves qui ont des difficultés semblables. Bien qu'ils aient une formation en enseignement, les orthopédagogues peuvent être engagés dans les commissions scolaires à titre d'enseignant ou de professionnel. Ce double statut n'est pas anodin : il illustre la confusion concernant la fonction même de l'orthopédagogie.

La problématique de notre recherche, sur l'acte orthopédagogique, se déploie à partir de la tension entre le cadre « didactique », fondé sur la mise en œuvre des conditions d'enseignement/apprentissage qui tiennent compte de la spécificité du savoir à apprendre, et le cadre « cognitiviste », fondé sur la rééducation des processus cognitifs qui seraient déficitaires chez l'élève en difficulté d'apprentissage. Peu de recherches ayant été menées en mathématiques dans le contexte de l'orthopédagogie, les orthopédagogues sont relativement démunis pour construire une intervention spécifique du savoir mathématique visé et s'inspirent alors de modèles d'intervention plus généraux tels que ceux offerts par le cadre cognitiviste. Dans notre recherche, nous avons opté pour un appui théorique de nature didactique considérant qu'une analyse épistémologique des savoirs à apprendre ainsi qu'une analyse des interactions entre les différents acteurs du système didactique sont fondamentales pour construire une intervention orthopédagogique en mathématiques. La présente recherche a donc pour objectif l'étude de conditions didactiques favorables à une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Pour atteindre cet objectif, nous avons dégagé un certain nombre de conditions didactiques dans les écrits scientifiques en nous appuyant sur les travaux portant sur la mise à l'épreuve de la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998) en contexte d'adaptation scolaire ainsi que sur ceux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fraction. Sur la base de ces conditions, une séquence d'enseignement sur l'équivalence des fractions a été élaborée et expérimentée, en contexte orthopédagogique, auprès de trois groupes d'élèves. Cette séquence comporte quatre grandes situations qui sollicitent différentes interprétations de la fraction, selon le modèle de Kieren (1976, 1980, 1989).

L'analyse de la séquence montre que malgré les contraintes spécifiques au contexte orthopédagogique, les situations à dimension adidactique favorisent l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction en articulation avec l'équivalence des fractions. En effet, les conditions didactiques retenues pour la construction et le pilotage des situations conduisent les élèves à s'engager dans la recherche de stratégies adaptées à la résolution des problèmes par le biais d'une interaction relativement fertile avec le milieu didactique; ils agissent donc en fonction de la logique interne de la situation. La séquence permet ainsi de contrer certains phénomènes didactiques relevés en adaptation scolaire et considérés comme néfastes pour l'apprentissage, tels que la centration sur les erreurs et le morcellement du savoir. L'analyse des résultats montre par ailleurs la nécessité d'organiser à un rythme

soutenu des moments de décontextualisation pour favoriser la liaison entre l'effectivité d'une connaissance locale et le savoir culturel qui lui correspond. Dans cette perspective, l'écriture mathématique s'avère utile pour permettre aux élèves d'identifier, dans la situation de référence, ce qui relève du savoir mathématique. De plus, des activités conventionnelles semblent nécessaires pour l'établissement de relations entre les deux institutions dans lesquelles travaillent les élèves, la classe et le contexte orthopédagogique.

Enfin, l'évolution des connaissances des élèves au cours des situations montre la richesse d'une intervention orthopédagogique en mathématiques fondée sur une approche didactique. Notre recherche s'inscrit ainsi dans le domaine de la didactique des mathématiques en adaptation scolaire en contribuant à l'élaboration et à la mise à l'épreuve de fondements didactiques pour l'enseignement de la fraction dans un cadre orthopédagogique.

Mots-clés : orthopédagogie, difficulté d'apprentissage, mathématiques au primaire, fraction, situation adidactique, décontextualisation des connaissances.

INTRODUCTION

Le pourcentage d'élèves identifiés « handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage » (EHDA) est de 12,42 % et 66,7 % d'entre eux sont déclarés en difficulté d'apprentissage (MEQ, 1999)¹. Dans le contexte actuel d'intégration des élèves en difficulté dans les classes ordinaires, le service de l'orthopédagogie vise à soutenir ces élèves dans l'apprentissage des matières de base. Bien que la prévalence des difficultés en français et en mathématiques soit comparable (*Expertise collective*, 2007²), en raison de la pression sociale pour la réussite des élèves en français, et plus particulièrement en lecture, les orthopédagogues interviennent davantage dans ce domaine qu'en mathématiques. Par conséquent, la « culture orthopédagogique » relève grandement des débats et des enjeux qui concernent les troubles spécifiques du langage, largement étudiés en sciences cognitives. Beaucoup moins de recherches portent sur les difficultés en mathématiques, ce qui s'expliquerait notamment par la complexité de l'objet d'étude (Berch D. et Mazzocco, 2007). Ainsi, peu d'études permettent actuellement de fonder l'intervention orthopédagogique en mathématiques. Nous avons donc choisi, dans notre thèse, de nous intéresser à ce sujet.

Dans les trois premiers chapitres, deux concepts centraux de la thèse sont abordés : la pratique orthopédagogique et les difficultés d'apprentissage en mathématiques. Nous confrontons deux postures épistémologiques distinctes permettant de traiter ces concepts, soit les thèses cognitiviste et didactique. Le premier chapitre porte sur la pratique orthopédagogique. Une description de ce qu'est le service orthopédagogique et du contexte dans lequel il a été mis en place dans le système scolaire est d'abord présentée. Nous précisons ensuite la fonction des orthopédagogues en tentant d'identifier la posture épistémologique sur l'apprentissage qui la caractérise. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les sources suivantes : le contenu de la formation des orthopédagogues, les documents produits par l'Association des orthopédagogues du Québec (ADOQ) et les propositions du

¹ Il est difficile d'obtenir des données plus récentes concernant le pourcentage d'élèves en difficulté d'apprentissage puisque depuis 2000, ces élèves sont regroupés avec les élèves en difficulté d'adaptation et les élèves présentant une déficience légère sous l'appellation « élèves à risque ».

² En 2007, sur la base de plus de 2 000 articles, un bilan des données scientifiques concernant la dyslexie, la dysorthographe et la dyscalculie, a été réalisé par un groupe d'experts réunis par l'Inserm (Institut national de la santé et de la recherche médicale).

ministère de l'Éducation à l'égard de l'adaptation scolaire. Le deuxième chapitre porte sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques. Trois disciplines s'intéressant à cette problématique sont distinguées. Deux d'entre elles, la neuropsychologie et la psychologie cognitive, s'intéressent au système de traitement de l'information, alors que la troisième, la didactique, prend en compte la spécificité du savoir articulée aux conditions d'enseignement. Nous montrons, dans le troisième chapitre, qu'une approche qui relève de la thèse cognitive semble insuffisante pour penser l'intervention orthopédagogique en mathématiques en raison de l'absence, d'une part, de la prise en compte de la dimension épistémologique du savoir visé et, d'autre part, de la dimension interactive entre l'enseignement et l'apprentissage. Ainsi, nous privilégions un appui sur la thèse didactique pour penser l'intervention orthopédagogique en mathématiques. L'objectif de notre recherche consiste, plus précisément, à étudier les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique portant sur la notion de fraction.

Le choix de la fraction comme contenu disciplinaire repose sur le fait que cette notion est difficile tant pour l'apprentissage que pour l'enseignement, et sur son importance dans la transition primaire/secondaire. Ainsi, dans le quatrième chapitre est menée une analyse d'ordres épistémologique, ontogénique et didactique (Artigue, 1988) de la fraction, de manière à tenir compte des caractéristiques du savoir visé. Le chapitre porte, plus précisément, sur les propriétés des nombres rationnels, sur les différentes interprétations de la fraction selon le modèle de Kieren, sur les étapes dans l'acquisition de la fraction et, finalement, sur la présentation de deux modèles d'enseignement incontournables portant sur cette notion.

La méthodologie de la recherche est décrite dans le cinquième chapitre. Les conditions didactiques retenues dans les écrits scientifiques pour l'intervention orthopédagogique sur la fraction sont regroupées en trois grandes catégories :

- 1) les conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension adidactique;
- 2) les conditions relatives à la décontextualisation des connaissances;
- 3) les conditions spécifiques à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions.

Afin de mettre à l'épreuve les conditions didactiques choisies, une séquence d'enseignement sur la fraction, fondée sur ces conditions, est élaborée par la chercheuse et la directrice de la thèse et expérimentée par la chercheuse auprès de trois groupes composés chacun de trois élèves en difficulté d'apprentissage. La séquence est composée de quatre situations. Pour chacune des situations sont précisés l'enjeu mathématique visé et le but poursuivi par les élèves, et sont décrites les conduites mathématiques anticipées ainsi que les principales contraintes de chacun des scénarios composant la situation. Pour recueillir les données relatives à la séquence d'enseignement, chacune des séances de la séquence (huit séances par groupe) est filmée et transcrite, et les productions des élèves sont conservées à des fins d'analyse. Pour compléter ces sources d'informations, d'autres outils de collecte de données sont utilisés. En effet, un prétest écrit est administré aux élèves sélectionnés ainsi qu'à l'ensemble des élèves de leur groupe-classe. De plus, un entretien individuel, s'étalant sur deux séances d'environ 45 minutes, est réalisé avant la séquence auprès des élèves sélectionnés et un posttest est administré à ces mêmes élèves.

Trois plans d'analyse des données sont réalisés. Le premier, effectué au chapitre VI, vise à confronter les performances obtenues par les élèves aux entretiens et aux tests écrits, avant et après l'expérimentation. Les deux autres plans d'analyse, qui font l'objet du chapitre VII, portent sur la séquence d'enseignement. Le deuxième plan d'analyse vise la caractérisation de la progression du savoir au sein de chaque groupe d'élèves à chacune des situations qui compose la séquence d'enseignement. Quant au troisième plan d'analyse, il concerne la validation interne des situations, autrement dit la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*. Une attention particulière est portée aux interactions entre l'expérimentatrice et les élèves, de manière à tenir compte de la spécificité du contexte orthopédagogique. Au chapitre VIII, les résultats issus des trois plans d'analyse sont confrontés aux conditions didactiques ayant servi à l'élaboration des situations. Nous apportons ainsi quelques éléments de réponse, mais aussi de réflexion, sur les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.

CHAPITRE I

LA PRATIQUE ORTHOPÉDAGOGIQUE

Ce chapitre porte sur les pratiques d'enseignement dans le champ de spécialisation de l'orthopédagogie. Après une description de ce qu'est l'orthopédagogie, le contexte dans lequel ce service a été mis en place dans le système scolaire est rappelé de manière à saisir les enjeux institutionnels sur lesquels il est fondé. Ce contexte est utile pour comprendre les transformations qui ont marqué les contenus de la formation au cours des 40 dernières années et pour préciser le rôle de l'orthopédagogue dans la logique actuelle de l'organisation des services. Par ailleurs, les pratiques effectives des orthopédagogues sont difficiles à circonscrire du fait qu'elles prennent des formes très variées selon l'organisation des services des différents établissements scolaires. Pour définir le rôle de l'orthopédagogue, nous nous appuyons donc sur différentes sources³ : d'abord, le contenu actuel de la formation offerte par diverses universités et puis, deux dispositifs qui participent à la formation de l'identité professionnelle de l'orthopédagogue, soit les fonctions de l'orthopédagogue selon l'Association⁴ des orthopédagogues du Québec et les propositions du ministère de l'Éducation à l'égard de l'adaptation scolaire. Nous analysons ces dispositifs en tentant d'identifier la posture épistémologique sur l'apprentissage qui les caractérise.

1.1 L'orthopédagogie

L'orthopédagogie est un service visant à soutenir les élèves en difficulté dans l'apprentissage des matières de base. Un orthopédagogue est un professionnel détenant un baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale, tout comme l'enseignant en classe spéciale. Les orthopédagogues n'ont cependant pas de classe à leur charge. La plupart d'entre eux œuvrent dans le milieu scolaire (principalement dans les écoles primaires, mais aussi dans les

³ Notons qu'en plus de ces sources, nous présentons, au chapitre II, des études qui portent sur ce champ d'intervention (principalement en classes spéciales, mais également en dénombrement flottant).

⁴ Il faut distinguer une association professionnelle, qui regroupe des personnes autour d'un intérêt professionnel commun, d'un ordre professionnel, qui délivre le permis d'exercer.

écoles secondaires), mais certains travaillent également en pratique privée, dans les hôpitaux, dans les centres de la petite enfance (CPE), dans les cégeps ou encore, plus récemment, dans les universités (Trépanier, 2008).

Il y a peu d'études qui nous informent des tâches effectuées par les orthopédagogues. Celle de Filion et Goupil, bien qu'elle remonte à 1995, demeure la plus complète et la plus pertinente. En effet, la description du service orthopédagogique qui y est faite est, selon notre expérience du milieu scolaire, encore actuelle. Selon cette étude, menée auprès de 18 orthopédagogues œuvrant à Montréal dans des écoles primaires, 79 % des activités se déroulent dans le local de dénombrement flottant⁵. Les orthopédagogues participant à cette recherche ont principalement effectué des rencontres en groupes incluant de deux à quatre élèves, et la grande majorité de leurs interventions (81,8 %) a été consacrée au français. Les tâches administratives, le soutien à l'enseignement en classe, les rencontres avec les enseignants, la direction et les parents complètent le cahier de charges.

Les élèves suivis en orthopédagogie sont recommandés par l'enseignant de la classe en raison des difficultés qu'il a repérées. Ces élèves sont, selon la terminologie du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS), « à risque ». Étant donné le nombre restreint d'élèves pour une même séance de travail, l'orthopédagogue est appelé à choisir des tâches qui devraient permettre aux élèves de dépasser leurs difficultés. Il travaille donc des contenus pour lesquels l'enseignement en classe n'aurait pas fonctionné. Certains orthopédagogues proposent alors les mêmes types d'activités que ceux faits en classe en travaillant parfois à partir du même matériel pédagogique que les enseignants. Plusieurs orthopédagogues utilisent cependant leur propre matériel, recherchant des voies d'accès aux savoirs différents de ceux utilisés en classe. La durée des interventions varie en fonction des besoins des élèves et des ressources disponibles. Ainsi, certains élèves peuvent être suivis pendant quelques semaines, alors que d'autres sont suivis pendant plusieurs années. La fréquence des rencontres varie généralement d'une à trois fois par semaine. Le nombre élevé d'élèves référés en orthopédagogie conduit parfois les orthopédagogues à voir certains élèves moins d'une fois par semaine.

⁵ L'expression « dénombrement flottant » désigne un service donné à l'extérieur de la classe en individuel ou en petit groupe à des élèves recommandés par l'enseignant(e).

Toujours selon Filion et Goupil (1995), des dossiers sont tenus pour chacun des élèves suivis. Ces dossiers peuvent contenir diverses informations : le plan d'intervention⁶, des communications avec les parents, les formulaires informant les parents du début et de la fin du service, les bilans orthopédagogiques (faits généralement à la fin de chaque année), des résultats à des tests diagnostiques, des travaux faits en orthopédagogie ou en classe, des bulletins scolaires et des rapports d'évaluation de professionnels externes (par exemple, de l'orthophoniste). Ces dossiers servent à orienter la nature des interventions orthopédagogiques, d'appui pour la communication avec les parents et les différents intervenants, ainsi qu'à faciliter le suivi lors d'un changement d'école de l'élève.

Précisons, par ailleurs, que les commissions scolaires engagent généralement les orthopédagogues en tant qu'enseignants orthopédagogues. Ils relèvent dans ce cas de la même convention collective que les enseignants, ce qui n'a rien d'étonnant puisque les orthopédagogues suivent la même formation que les enseignants des classes spéciales. L'orthopédagogie apparaît ainsi comme une branche de l'adaptation scolaire. Cependant, l'orthopédagogie est, dans d'autres commissions scolaires, considérée comme un service éducatif complémentaire (au même titre que la psychologie ou l'orthophonie); dans ces commissions scolaires, les orthopédagogues sont, en conséquence, engagés en tant que professionnels et relèvent alors de la même convention collective que les professionnels non enseignants, ce qui peut avoir un impact sur les attentes à l'égard de l'intervention orthopédagogique. Selon le Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones (2007), les commissions scolaires doivent choisir l'appartenance syndicale selon les fonctions qu'elles attribuent à l'orthopédagogue, c'est-à-dire analyser si ces fonctions s'apparentent davantage aux fonctions caractéristiques d'un enseignant ou à celles d'un professionnel. Bien que plusieurs activités de l'enseignant orthopédagogue et du professionnel orthopédagogue soient comparables, il existerait une frontière entre les fonctions de chacun : « Un enseignant enseigne, ce que ne fait pas le professionnel, en ce sens qu'il transmet des connaissances aux élèves, dans le cadre de l'existence d'un

⁶ La loi sur l'instruction publique (1988) oblige les directions d'école à établir un plan d'intervention (PI) pour les élèves handicapés ou en difficulté, avec l'aide de l'élève, de ses parents et du personnel qui lui dispense des services. L'orthopédagogue participe donc au plan d'intervention des élèves avec lesquels il travaille. Sont indiqués dans le plan d'intervention les objectifs poursuivis et les moyens mis en place pour les atteindre.

programme structuré et qu'il a à vérifier les acquis reçus » (p. 18). Ainsi, un enseignant orthopédagogue qui exerce en dénombrement flottant serait tenu d'orienter ses interventions en fonction du programme de formation, ce qui ne serait pas le cas de l'orthopédagogue engagé en tant que professionnel orthopédagogue. Dans ce dernier cas, il y a lieu de s'interroger sur le rapport entre la dénomination « orthopédagogie », qui intègre dans son expression même la pédagogie, c'est-à-dire l'enseignement, et la fonction que le système d'enseignement dévolue à l'« orthopédagogie ». Quelle serait donc la fonction de ce professionnel « orthopédagogue » dont les actes ne seraient pas finalisés par la transmission de connaissances ou, autrement dit, par l'apprentissage des contenus scolaires ? Dans les sections qui suivent, nous tentons de cerner le cahier des charges des orthopédagogues et donc de cibler les actes propres à l'orthopédagogie comme éléments de réponse à cette question, par le biais d'un survol historique du service de l'orthopédagogie et de la formation des orthopédagogues, de la description des contenus des programmes de formation actuels ainsi que des dispositifs professionnels qui façonnent l'identité professionnelle des orthopédagogues. Mais avant, il nous paraît nécessaire d'apporter une précision. Notre expérience d'orthopédagogue nous convie à prendre en compte les considérations de nature administrative qui semblent également peser dans le choix du statut de l'orthopédagogue par une commission scolaire. Ces considérations sont, entre autres, les semaines de congé attribuées à un professionnel ou à un enseignant (l'enseignant bénéficie de plus de semaines de congé que le professionnel) et les tâches connexes attribuées aux enseignants et aux professionnels (par exemple, la surveillance des élèves en dehors des horaires de classe qui est exercée par les enseignants, et non par les professionnels).

1.2 Bref historique de l'orthopédagogie au Québec

Au Québec, à la suite du rapport du Comité provincial de l'enfance exceptionnelle (COPEX), paru en 1976, les élèves en difficulté sont maintenus dans le cadre le plus normal possible par un système en cascades comportant huit niveaux, allant de l'enseignement en classe ordinaire sans service particulier (niveau 1) à l'enseignement à l'intérieur d'un centre d'accueil ou d'un centre hospitalier (niveau 8). Par conséquent, les classes ordinaires accueillent de plus en plus d'élèves en difficulté, d'où l'intérêt de la mise en place du service orthopédagogique.

C'est en 1967, à l'Université de Montréal, qu'est offerte la première formation en orthopédagogie. Celle-ci se différenciait de la formation en enfance inadaptée en adoptant une approche clinique et médicale (Laplante, 2007). Elle visait plus particulièrement le développement des compétences d'évaluation diagnostique et, dans une moindre mesure, d'intervention rééducative en lecture, en écriture, en mathématiques et en psychomotricité. Les études en orthopédagogie portaient notamment sur les préalables instrumentaux tels que la psychomotricité et l'orientation visuospatiale, ainsi que sur le développement social et cognitif de l'enfant pour l'apprentissage de la langue et des mathématiques. La formation était donc fortement centrée sur les difficultés de développement de l'enfant et peu axée sur l'enseignement aux élèves. Par conséquent, l'évaluation en mathématiques était souvent assimilée à une évaluation piagétienne. Il s'agissait essentiellement d'évaluer le stade cognitif atteint par l'élève, à partir des épreuves piagésiennes, et d'interpréter les difficultés mathématiques à l'aune de cette évaluation. Adoptant une approche à caractère plus « psychologique » que « didactique », les orthopédagogues pouvaient ainsi distinguer leurs interventions en regard de celles des enseignants de la classe ordinaire. Or, il s'agissait, selon Lemoyne et Lessard (2003), d'une application réductionniste de la théorie de Piaget.

Concernant l'intervention orthopédagogique en lecture, des troubles d'apprentissage sévères, comme la dyslexie, étaient diagnostiqués sans véritables appuis théoriques sérieux (Laplante, 2007). Le développement des connaissances dans le domaine des didactiques disciplinaires, mais aussi dans le domaine de la psychologie cognitive, a contribué à repenser les contenus de formation en orthopédagogie. Par conséquent, celle-ci s'est peu à peu jumelée à la formation en enfance inadaptée (désormais appelée formation en enseignement en adaptation scolaire et sociale). D'ailleurs, à la demande du Comité d'agrément des programmes de formation à l'enseignement (CAPFE), depuis 2002, il n'y a plus aucune université qui offre la formation de 1^{er} cycle en orthopédagogie. Cependant, certaines universités ont créé récemment des programmes⁷ de 2^e cycle universitaire spécifiques à la pratique orthopédagogique, lesquels ne sont toutefois pas obligatoires pour exercer la profession. À l'Université du Québec à Montréal, par exemple, est offerte une maîtrise professionnelle en orthopédagogie. Selon Horth (2000), l'intégration des élèves handicapés et des élèves en

⁷ La taille de ces programmes est très variée, allant de 9 à 60 crédits.

difficulté d'adaptation ou d'apprentissage dans les années 1980 aurait contribué à la disqualification du modèle psychomédical. Il nous semble cependant que celui-ci a été réactivé au cours des années 1990 par l'Association des orthopédagogues du Québec (ADOQ)⁸.

1.3 Contenu de la formation en orthopédagogie

Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour être orthopédagogue, tout comme pour enseigner en classe spéciale, il faut détenir un baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale. Ce baccalauréat est offert par sept établissements au Québec : les Universités du Québec à Montréal (UQAM), à Rimouski (UQAR), à Chicoutimi (UQAC), à Trois-Rivières (UQTR) et en Outaouais (UQO) ainsi que l'Université de Sherbrooke (U de S) et l'Université de Montréal (U de M). Chacune de ces universités offre deux orientations : l'intervention au préscolaire-primaire et l'intervention au secondaire.

Afin d'avoir un aperçu du contenu de la formation que reçoivent les orthopédagogues, nous déclinons les cours offerts dans le baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale de trois universités québécoises. Nous avons sélectionné une université du réseau de l'UQ, l'Université du Québec à Montréal (UQAM), et les deux universités n'appartenant pas à ce réseau, soit l'Université de Montréal (U de M) et l'Université de Sherbrooke (U de S). Nous nous intéressons aux cours offerts dans le profil de l'enseignement au préscolaire-primaire du programme d'adaptation scolaire et sociale. Une description de chacun des profils ne semble pas nécessaire, car plusieurs cours sont communs aux deux profils et, lorsqu'ils sont différents, il y a généralement un cours équivalent dans chacun des profils (par exemple, évaluation des apprentissages au primaire/ évaluation des apprentissages au secondaire). Le nombre de crédits d'un baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale est de 120. Nous regroupons les crédits à acquérir en six grandes catégories :

⁸ Le lecteur peut se référer à la section 1.4.1 de ce chapitre, et plus particulièrement aux pages 14 à 16, pour obtenir plus d'information sur l'ADOQ.

1) stages; 2) projets d'intégration; 3) cours disciplinaires et didactiques; 4) cours à caractère transversal; 5) cours à caractère psychologique; 6) cours à option.⁹

1.3.1 Stages

La première catégorie concerne les stages. Précisons que les formations en enseignement (au primaire, au secondaire et en adaptation scolaire) ont été prolongées à la fin des années 1990, passant de trois à quatre années universitaires, afin de bonifier la formation pratique. Ainsi, le nombre d'heures de stage est augmenté; les formations en enseignement doivent désormais contenir un minimum de 700 heures de stage (Gervais et Desrosiers, 2001). Les stages s'étendent de la première à la quatrième année de formation afin d'amener les étudiants à prendre le groupe en charge de façon de plus en plus autonome. Dans le baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale, les stages sont généralement réalisés en classe spéciale, mais peuvent également l'être en orthopédagogie. Le nombre de crédits accordés aux stages est comparable dans les trois universités sélectionnées : 20 crédits à l'UQAM; 21 à l'U de M; et 24 à l'U de S. L'annexe A présente, pour chacune des universités, les sigles et les titres des cours qui s'inscrivent dans cette catégorie.

1.3.2 Projets d'intégration

Les cours s'inscrivant dans la catégorie « projets d'intégration » sont fortement liés aux stages et sont généralement donnés sous la forme d'un séminaire ou d'un atelier. Ils visent l'articulation entre la théorie et la pratique et, ainsi, la réussite de la formation des étudiants. Nous regroupons, dans cette catégorie, les cours visant à amener les étudiants à faire le point sur leurs connaissances et leur cheminement, à réfléchir sur certains événements problématiques qui se sont produits en stage ainsi que sur les caractéristiques des milieux scolaires et enfin, à connaître les possibilités d'emplois qui s'offrent à eux à la fin de leur

⁹ Dans le programme de l'Université de Sherbrooke est indiqué que 26 crédits sont accordés aux activités pédagogiques à option. Or, les étudiants doivent choisir entre trois domaines d'enrichissement et quatre cours sont communs aux trois domaines (ASI703, ASI713, ASI731 ET ASS811). Nous n'avons donc pas inclus ces cours dans les cours à option.

formation. Nous incluons de plus dans cette catégorie les cours visant la conception de procédés d'intervention et d'évaluation qui seront mis à l'épreuve lors des stages. Le nombre de cours de ce type est beaucoup plus élevé à l'U de S (21 crédits) qu'à l'UQAM (10 crédits) et à l'U de M (9 crédits). Pour connaître les cours offerts par chacune des universités, le lecteur peut se référer à l'annexe B.

1.3.3 Cours disciplinaires et didactiques

La troisième catégorie, les cours disciplinaires et didactiques, est celle pour laquelle le plus grand nombre de crédits est accordé, et ce, pour les trois universités sélectionnées : 42 crédits à l'UQAM, 39 crédits à l'U de M et 32 crédits à l'U de S (voir annexe C). Nous incluons dans cette catégorie les cours d'orthodidactie (appellation de l'U de S) et les cours d'orthopédagogie (appellation de l'UQAM) liés à une discipline d'enseignement (ex. : orthodidactie 1 du français, orthopédagogie des mathématiques 1). Les disciplines pour lesquelles les cours de didactique sont les plus nombreux sont certes le français et les mathématiques, mais chacune des universités offre également des cours de didactique pour d'autres disciplines telles que les sciences ainsi que l'éthique et la culture religieuse.

1.3.4 Cours à caractère transversal

Les cours à caractère transversal, c'est-à-dire les cours en éducation qui transcendent les disciplines, forment la quatrième catégorie. Il s'agit, par exemple, de cours portant sur l'histoire et l'organisation de l'éducation, sur la recherche en éducation, sur la gestion de classe, sur l'évaluation des apprentissages et sur les technologies de l'information. L'U de S, comparativement aux deux autres universités, offre peu de cours qui s'inscrivent dans cette catégorie. En effet, 16 crédits y sont consacrés à l'U de S, alors que 27 y sont consacrés à l'UQAM et à l'U de M (voir annexe D).

1.3.5 Cours à caractère psychologique

La cinquième catégorie rassemble les cours à caractère psychologique, c'est-à-dire les cours s'intéressant au développement des enfants et aux caractéristiques de diverses clientèles de l'adaptation scolaire. Le contenu de ces cours est adapté à la formation en enseignement et comporte le plus souvent un volet « enseignement » ou « intervention ». C'est le cas des cours portant sur le développement de l'enfant, sur les difficultés d'apprentissage, les incapacités intellectuelles, les difficultés comportementales ainsi que sur la prévention, l'intervention et l'évaluation de divers troubles associés à l'élève. L'UQAM et l'U de S accordent 18 crédits à cette catégorie et l'U de M, 15 crédits (voir annexe E).

1.3.6 Cours à option

Enfin, chaque université offre des cours optionnels, mais leur rôle dans la formation diffère selon les universités (voir annexe F). À l'UQAM, seulement trois crédits sont accordés aux cours à option, mais l'étudiant peut choisir parmi huit cours et il peut également choisir d'autres cours avec l'accord de la direction du programme. À l'U de M, les étudiants doivent choisir trois cours de trois crédits parmi quatre cours. À l'U de S, neuf crédits sont également accordés aux cours à option. Or, les étudiants doivent choisir un domaine d'enrichissement parmi trois domaines proposés : 1) orthopédagogie auprès d'élèves à risque; 2) troubles du comportement; 3) handicaps et troubles envahissants du développement.

1.3.7 Résumé

La formation au baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale que reçoivent les orthopédagogues comporte de nombreux cours en didactique et particulièrement, en didactique du français et des mathématiques. En moyenne, 31,39 % des crédits sont accordés aux cours qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage d'une discipline. Des cours à caractère transversal, portant notamment sur le système de l'éducation et la gestion de classe, comportent également une part non négligeable de la formation (19,44 % des crédits). Par

ailleurs, seulement 14,17 % des crédits s'inscrivent dans la catégorie « cours à caractère psychologique » qui englobe les cours sur le développement de l'enfant ou encore sur les caractéristiques particulières de certaines clientèles d'élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (ÉHDAA). Ainsi, la formation au baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale se distingue de la formation jadis offerte en orthopédagogie en proposant une formation didactique disciplinaire plus importante. Le tableau 1.1 permet d'observer le nombre de crédits qu'accorde chacune des universités sélectionnées pour les six catégories de cours décrites précédemment.

Tableau 1.1
Nombre de crédits accordés en fonction des catégories de cours

	UQAM	U DE M	U DE S	Moyenne	%
Cours disciplinaires et didactiques	42	39	32	37,67	31,39
Cours à caractère transversal	27	27	16	23,33	19,44
Stages	20	21	24	21,67	18,06
Cours à caractère psychologique	18	15	18	17	14,17
Projets d'intégration	10	9	21	13,33	11,11
Cours à option	3	9	9	7	5,83

Il faut préciser qu'à cette formation initiale, les activités de formation continue non créditée offerte par les commissions scolaires et les associations professionnelles, ainsi que celles offertes par les universités, et qui sont alors créditées, sont relativement nombreuses. Nous supposons, sur la base de notre expérience d'orthopédagogue, que la formation non créditée offerte par des conseillers pédagogiques, des concepteurs de manuels scolaires ou encore des concepteurs de programmes d'intervention, joue un rôle non négligeable dans les pratiques d'enseignement mises en place.

1.4 Dispositifs professionnels façonnant l'identité des orthopédagogues

Les orthopédagogues forment au sein de leur commission scolaire une communauté professionnelle. Le partage d'outils, de références et de techniques est un moyen d'assurer la communication et la cohésion de cette communauté. Les formations offertes aux orthopédagogues au sein de la commission scolaire sont, sans aucun doute, une occasion de leur donner une culture professionnelle commune et, du point de vue de la commission scolaire, d'harmoniser les pratiques.

Lorsqu'un enseignant en adaptation scolaire est engagé en tant qu'orthopédagogue, il s'identifie à cette profession, qui se distingue de celle de l'enseignant. L'orthopédagogue développe ainsi un sentiment d'appartenance à sa communauté de pratique. L'identité professionnelle permet à la fois d'être identifié par les autres (identité pour autrui) et de s'identifier face aux autres (identité pour soi) (Dubar, 1994). La manière dont les orthopédagogues interprètent leur rôle est façonnée par ce qui circule dans leur communauté. Nous identifions deux dispositifs qui façonnent l'identité professionnelle des orthopédagogues : l'Association des orthopédagogues du Québec (ADOQ) et les documents du Ministère.

1.4.1 Association des orthopédagogues du Québec

L'Association des orthopédagogues du Québec (ADOQ) a été fondée en 1988 dans le but de caractériser la pratique orthopédagogique et de la distinguer ainsi non seulement de celle des enseignants d'adaptation scolaire, mais également de certains corps professionnels œuvrant en éducation, en particulier celui des orthophonistes. Une définition de l'orthopédagogie a été adoptée lors de l'assemblée générale annuelle de l'Association tenue en octobre 2013. Cette définition, disponible sur le site Internet de l'ADOQ¹⁰, est la suivante :

L'orthopédagogie est la science de l'éducation dont l'objet est l'évaluation et l'intervention relatives aux apprenants susceptibles de présenter ou présentant des difficultés d'apprentissage scolaire, incluant les troubles d'apprentissage. Sa pratique

¹⁰ <http://www.ladoq.ca/>, consulté le 13 juillet 2015.

prend appui sur la recherche en orthodidactique, en didactique, en pédagogie, en sciences cognitives et en neuroéducation.

L'évaluation orthopédagogique consiste à préciser les difficultés que présente l'apprenant sur le plan des connaissances, des stratégies et des processus cognitifs, principalement en lecture, en écriture et en mathématiques. Elle inclut le dépistage des apprenants pouvant présenter des difficultés d'apprentissage. L'évaluation orthopédagogique considère également d'autres facteurs susceptibles d'influencer l'apprentissage, soit des facteurs affectifs et motivationnels, sociofamiliaux et scolaires, notamment les approches pédagogiques.

S'appuyant sur les conclusions évaluatives, l'intervention orthopédagogique a des visées préventives ou rééducatives de nature corrective ou compensatoire, afin de permettre à l'apprenant de progresser de façon optimale sur le plan des apprentissages scolaires en lecture, en écriture et en mathématiques. Elle s'adresse directement à l'apprenant et implique la collaboration avec les intervenants concernés (enseignants, parents, professionnels).

Une référence aux sciences cognitives et à la neuroéducation conduit à tenir compte non seulement des difficultés concernant les connaissances des élèves, mais également des difficultés liées aux processus cognitifs. D'ailleurs, dans le mémoire qu'elle a publié en 2003, l'ADOQ se réfère aux travaux de Laplante (1998) et indique que l'évaluation orthopédagogique vise à identifier la nature des difficultés, en examinant soit un processus en particulier soit l'interaction des processus. L'intervention orthopédagogique est alors définie comme « une intervention spécialisée centrée sur les processus cognitifs et métacognitifs qui compromettent le développement des compétences » (p. 13). Elle serait généralement de nature rééducative, visant ainsi à rendre fonctionnels les processus déficitaires, et serait de nature compensatoire lorsque la rééducation ne conduit pas à une progression minimale des apprentissages, visant alors à favoriser une surutilisation des processus les plus fonctionnels.

La fonction de l'orthopédagogue, telle que décrite par l'ADOQ, correspond davantage à celle d'un professionnel qu'à celle d'un enseignant, et est en rupture avec le contenu de la formation initiale des orthopédagogues. Elle se distingue en effet des orientations en matière de formation en adaptation scolaire et sociale, centrée sur les processus d'enseignement et d'apprentissage. On peut dès lors mieux saisir les raisons pour lesquelles l'ADOQ souhaite

que l'exercice de l'orthopédagogie soit réservé aux détenteurs d'une formation spécialisée dans le domaine au 2^e cycle.

1.4.2 Documents produits par le ministère de l'Éducation

La plupart des orthopédagogues sont engagés en tant qu'enseignants orthopédagogues et relèvent ainsi de la même convention collective que les enseignants. Ils sont donc tenus d'orienter leurs interventions en fonction des recommandations du Ministère. Ces recommandations ont indéniablement un impact considérable sur la pratique non seulement des enseignants orthopédagogues, mais également des professionnels orthopédagogues, qui participent tous deux aux mêmes formations et échangent entre eux sur leur pratique. Nous nous intéressons donc aux orientations adoptées par le Ministère.

À la suite du rapport de la Commission Parent qui visait essentiellement l'accessibilité de l'éducation à tous, une réforme du système éducatif a été conduite au Québec dans les années 1960. Étant donné les problématiques auxquelles se heurte l'école, notamment en ce qui a trait au haut taux de décrochage scolaire, le curriculum a été révisé à l'aube du nouveau millénaire afin d'offrir aux jeunes Québécois une formation adaptée à leur réalité. Le programme de formation de l'école québécoise (2001) propose ainsi de passer d'une démocratisation de l'enseignement à une démocratisation de l'apprentissage : il ne s'agit plus seulement de permettre l'accès au plus grand nombre, mais également le succès du plus grand nombre. Pour amener les élèves à développer des habiletés intellectuelles utiles dans le contexte actuel où la société du savoir est en mouvance continue, il est notamment proposé d'enseigner les contenus disciplinaires fondamentaux en s'intéressant aux processus qui en permettent la compréhension. Il convient ainsi de « se préoccuper du développement des processus mentaux nécessaires à l'assimilation des savoirs, à leur utilisation dans la vie réelle et à leur réinvestissement dans des apprentissages ultérieurs » (p. 3). Le programme est par ailleurs axé sur le développement de compétences, c'est-à-dire d'un « savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (p. 4), ce qui suggère un nouveau rapport aux savoirs qui insiste sur la formation de la pensée. Dans cette perspective, il importe que l'élève développe des outils intellectuels flexibles, adaptables à

l'environnement changeant dans lequel il vit. Bien que certains apprentissages requièrent la mémorisation de savoirs, la majorité des éléments du programme concerne le développement de compétences et la maîtrise de savoirs complexes, ce qui exige de dépasser les cloisonnements entre les disciplines. Le programme de formation comporte ainsi trois grands éléments : les domaines d'apprentissage (pour chacun de ces domaines sont présentées des compétences disciplinaires auxquelles se rattachent des savoirs essentiels), les compétences transversales (qui se déploient à travers les différents domaines d'apprentissage) et les domaines généraux de formation (qui consistent en un ensemble de problématiques touchant la vie contemporaine, visant ainsi à amener les élèves à établir des liens entre les apprentissages scolaires et leur vie quotidienne).

Une importante modification qu'apporte le programme est, d'une certaine façon, un passage du « spécifique » au « générique » pour atteindre un développement général harmonieux de l'élève. Les enseignants ont comme mandat de développer chez leurs élèves des compétences transversales et des compétences disciplinaires, laissant ainsi les savoirs essentiels au second plan. Plutôt qu'évaluer de façon spécifique chacun des savoirs, les enseignants doivent évaluer des compétences disciplinaires auxquelles se rattache l'ensemble des savoirs essentiels propres à une discipline. En mathématiques, il convient ainsi d'évaluer la capacité de l'élève à *résoudre une situation-problème*, à *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* et à *communiquer à l'aide du langage mathématique*. Ces trois compétences disciplinaires sont traitées à partir d'un ensemble de savoirs essentiels, pouvant s'étendre de la production de dallage à l'établissement de fractions équivalentes. Pour favoriser l'intégration des apprentissages scolaires, les enseignants sont invités à s'appuyer sur les domaines généraux de formation lors de la planification de leur enseignement.

Par ailleurs, afin de tenir compte du mode et du rythme d'apprentissage ainsi que des intérêts des élèves, le programme propose une différenciation de l'enseignement. Dans la foulée de la réforme scolaire, une politique de l'adaptation scolaire accompagnée d'un plan d'action est proposée par le ministère de l'Éducation (1999) pour aider les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (ÉHDA) à réussir. Cette politique suggère que la réussite éducative, c'est-à-dire la réussite sur les plans de l'instruction, de la socialisation et de la qualification, se traduit différemment selon les capacités et les besoins des élèves. La

réussite est ainsi définie comme étant « l'obtention de résultats observables, mesurables et reconnus qui rendent compte de l'évolution de l'élève, des progrès continus enregistrés » (p. 17). Selon le Ministère, les ÉHDAA seraient de plus en plus nombreux à être scolarisés à l'école ordinaire et en classe ordinaire, ce qui montre un certain progrès sur la réussite au niveau de la socialisation. La réussite sur les plans de l'instruction et de la qualification serait en revanche un défi important à relever. Afin de soutenir concrètement le milieu scolaire dans l'application de la nouvelle politique de l'adaptation scolaire, le document propose des moyens pour favoriser la réussite des ÉHDAA à travers six voies d'action à privilégier.

La première voie consiste à *Reconnaître l'importance de la prévention ainsi que d'une intervention rapide et s'engager à y consacrer des efforts supplémentaires*. Il serait ainsi essentiel d'identifier rapidement les difficultés pour pouvoir adapter le plus tôt possible les interventions aux besoins de l'élève. C'est effectivement ce que propose la deuxième voie : *Placer l'adaptation des services éducatifs comme première préoccupation de toute personne intervenant auprès des élèves handicapés ou en difficulté*. Cette adaptation se situe à deux niveaux. D'une part, différentes possibilités doivent être proposées pour offrir aux élèves HDAA de meilleures possibilités de qualification. D'autre part, l'enseignant doit adopter une approche souple qui respecte le rythme d'apprentissage des élèves et ajuster ou modifier ses façons de faire en fonction des besoins et des capacités des élèves. Pour ce faire, il convient donc de *Mettre l'organisation des services éducatifs au service des ÉHDAA en la fondant sur l'évaluation individuelle de leurs capacités et de leurs besoins, en s'assurant qu'elle se fasse dans le milieu le plus naturel pour eux, le plus près possible de leur lieu de résidence et en privilégiant l'intégration à la classe ordinaire*. Autrement dit, pour favoriser la réussite, il convient de procéder à une évaluation individuelle pour connaître la situation de l'élève et ainsi organiser les services en fonction de ses besoins, de ses capacités et de ses intérêts. Un plan d'intervention est ainsi établi par la direction de l'école avec l'aide des parents, du personnel intervenant auprès de l'élève et de l'élève lui-même, dans lequel sont décrits les services éducatifs que reçoit l'élève. La coordination des interventions concerne plus particulièrement la quatrième voie, soit *Créer une véritable communauté éducative avec l'élève d'abord, ses parents puis avec les organismes de la communauté intervenant auprès*

des jeunes et les partenaires externes pour favoriser une intervention plus cohérente et des services mieux harmonisés. L'importance de la participation des parents et de l'implication de l'élève dans sa réussite pour la création d'une véritable communauté éducative est ici soulevée. La cinquième voie d'action consiste à *Porter une attention à la situation des élèves à risque, notamment ceux qui ont une difficulté d'apprentissage ou relative au comportement, et déterminer des pistes d'intervention permettant de mieux répondre à leurs besoins et à leurs capacités.* Pour ce faire, il conviendrait d'adopter une vision globale en tenant compte de divers problèmes sociaux que peuvent vivre ces élèves tels que la toxicomanie et la violence. Enfin, *Se donner des moyens d'évaluer la réussite éducative des élèves sur les plans de l'instruction, de la socialisation et de la qualification, d'évaluer la qualité des services et de rendre compte des résultats* constitue la dernière voie. Il serait effectivement essentiel de se doter d'indicateurs permettant d'évaluer les progrès de l'élève, mais également d'évaluer la qualité des services qui lui sont offerts.

1.4.3 Discussion

Selon le ministère de l'Éducation, l'adéquation de l'enseignement reposerait sur le respect du rythme d'apprentissage des élèves, mais également de leurs modes d'apprentissage. Il conviendrait alors d'adapter les interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves. Comme le soulève Perrenoud (1997), les propositions concernant la différenciation pédagogique conduisent bien souvent à une individualisation des parcours. En effet, les élèves étant différents, pour présenter à chacun des situations optimales permettant de progresser dans ses apprentissages, il convient de proposer des situations différentes. Or, Roiné (2009) remet en question la proposition de l'individualisation comme mesure d'aide :

En quoi l'aparté des élèves constitue-t-il une réponse en soi à l'échec scolaire ? Suffit-il de mettre à part pour remettre à flot ? L'aspect gestionnaire de ce type de réponses, c'est-à-dire la propension à ne considérer le problème qu'en termes organisationnels cache une indigence profonde de conceptualisation didactique. Organiser des aides individualisées est une chose mais savoir ce qu'il faut proposer aux élèves à l'intérieur de ces dispositifs en est une autre. Le silence institutionnel à ce sujet est patent. L'étude de Do (2007) montre que les deux dispositifs (différenciation et individualisation), demeurent des faux semblants institutionnels (selon l'expression de Glasman, 2003), voire des coquilles vides que les enseignants remplissent aléatoirement par des pratiques diverses qui restent à interroger : refaire la même chose, ré-expliquer, baisser son niveau

d'exigence, modifier la quantité de travail demandé (toujours à la baisse), simplifier, proposer des manipulations concrètes, des activités ludiques, valoriser les progrès, écouter, motiver, stimuler, redonner confiance. (p. 56-57)

Travailler auprès d'un nombre restreint d'élèves, comme le font les orthopédagogues, vise à faciliter l'adaptation des situations aux besoins spécifiques des élèves. Mais comment fait-on pour adapter les situations aux besoins des élèves ? Le Ministère apporte peu de réponses à cette question. On peut ainsi comprendre l'intérêt de l'ADOQ qui, pour combler ce vide, se donne comme mission de définir l'acte orthopédagogique.

Les pratiques plutôt individualisées des orthopédagogues semblent les conduire à s'identifier davantage aux professionnels qu'aux enseignants, un peu à l'image des orthophonistes et des psychologues. Comme les élèves sont dirigés vers le service orthopédagogique lorsque l'enseignement en classe n'a pas donné l'effet souhaité, l'hypothèse communément formulée est que l'élève répond mal à l'enseignement. Une intervention orientée vers les processus de traitement de l'information pour la remédiation des difficultés est alors jugée nécessaire. Une telle perspective appelle des appuis théoriques cognitivistes comme fondement à l'intervention.

La prégnance de la dimension cognitive de l'apprentissage se reflète d'ailleurs dans les revues professionnelles telles que *Vie Pédagogique* et *La revue de l'ADOQ*. L'importance de tenir compte de la façon d'apprendre de chaque élève est maintes fois soulevée (Aubé, 2005; Archambault et Richer, 2005; Laverdure, 2005; Sarrasin, 2007a; Sarrasin, 2007b; Bertrand-Poirier, 2007; Béliveau, 2007). La différenciation pédagogique est ainsi proposée comme outil pour tenir compte du profil cognitif de l'élève et pour respecter son rythme d'apprentissage (Francoeur, 2005; Marchand, 2005; Archambault et Richer, 2005; Béliveau, 2007). Des auteurs soulignent l'importance de celle-ci pour intervenir auprès d'élèves présentant des troubles particuliers tels qu'une dyscalculie (Béliveau, 2007; Bourque, 2007), un trouble envahissant du développement (Lepage, 2009) ou un trouble déficitaire de l'attention avec ou sans hyperactivité (Labrie, Lucas et Leroux, 2007).

Selon notre expérience, les auteurs les plus appréciés par les orthopédagogues sont des cognitivistes tels que : 1) Flessas et Lussier (1995), qui, s'appuyant sur les travaux de Luria¹¹, distinguent quatre styles cognitifs, c'est-à-dire quatre façons différentes de mémoriser et de traiter l'information; 2) Antoine De la Garanderie (1982, 1984, 1990), qui insiste sur l'importance de l'évocation (pouvant se faire sous forme visuelle ou auditive, selon le type de fonctionnement mental des élèves) pour imprimer dans la mémoire ce que les sens perçoivent; 3) Gardner (1999), pour sa théorie sur les intelligences multiples (l'auteur différenciait initialement sept formes d'intelligence).

Enfin, la nature du savoir ainsi que les conditions pour en favoriser la diffusion et l'appropriation par les élèves semblent peu prises en compte dans l'acte orthopédagogique. Notre analyse converge avec celle réalisée par Roiné (2009), en France, sur l'interprétation des difficultés d'apprentissage par les enseignants en S.E.G.P.A. (sections d'enseignement général et professionnel adapté)¹². Roiné (2009) a étudié comment les enseignants expliquent l'échec scolaire de leurs élèves et quels moyens ils mettent en œuvre pour y remédier. Pour ce faire, 126 questionnaires ont été administrés, des entretiens ont eu lieu auprès de huit enseignants et 16 séances mathématiques ont été observées. Selon les résultats obtenus, les enseignants en S.E.G.P.A. attribuent principalement des causes psychologisantes aux difficultés d'apprentissage et ils s'appuient, par conséquent, sur la pédagogie de la cognition pour penser l'intervention. Les enseignants expliquent les difficultés de leurs élèves par des faiblesses concernant des mécanismes cognitifs. Les interventions pour remédier aux difficultés ne sont donc pas pensées en lien avec le savoir visé et les conditions didactiques pour leur enseignement, mais plutôt en fonction des mécanismes cognitifs à développer, à l'image des propositions de l'ADOQ pour l'intervention orthopédagogique.

¹¹ Luria (1973) est l'un des premiers cognitivistes influent dans le domaine de l'apprentissage. Il différencie deux processus permettant de traiter l'information provenant de l'environnement extérieur : les processus séquentiel et simultané.

¹² Les S.E.G.P.A accueillent des élèves âgés entre 12 et 16 ans présentant des difficultés scolaires graves et persistantes qui ne sont ni liées à une déficience intellectuelle, ni à un handicap mental, ni à des difficultés de compréhension de la langue française.

CHAPITRE II

LES DIFFICULTÉS D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

Les difficultés d'apprentissage sont un objet d'étude pour différentes disciplines. Chacune aborde cette problématique avec les outils théoriques et méthodologiques que sa position épistémologique commande (Giroux, 2010). Nous distinguons trois disciplines s'intéressant aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : la neuropsychologie, la psychologie cognitive et la didactique¹³. La neuropsychologie et la psychologie cognitive sont très liées et partagent des perspectives communes sur la question des difficultés d'apprentissage : elles s'intéressent toutes deux au système de traitement de l'information (Demont, 2009). La psychologie cognitive s'intéresse cependant aux difficultés d'apprentissage générales (et aussi disciplinaires) qui peuvent avoir à leur source des facteurs neurologiques ou non, tandis que les neurosciences s'intéressent plus spécifiquement aux troubles d'apprentissage, lesquels découlent de conditions neurologiques ou neurodéveloppementales. La troisième discipline, la didactique, tient compte du contexte dans lequel se font les apprentissages ainsi que des caractéristiques du savoir enseigné. Les difficultés d'apprentissage sont ainsi étudiées en relation avec les difficultés d'enseignement. Enfin, notons que les différents domaines d'étude qui abordent les difficultés d'apprentissage ne sont pas indépendants les uns des autres, ils s'influencent mutuellement. Leurs contributions respectives à la problématique des difficultés d'apprentissage en mathématiques sont ici présentées.

2.1 La dyscalculie de la neuropsychologie

La neuropsychologie étudie le fonctionnement du cerveau et vise notamment à localiser le siège cérébral des fonctions mentales supérieures mises à contribution dans l'apprentissage.

¹³ Notons, par ailleurs, que certaines recherches se sont penchées sur la dimension affective dans l'apprentissage des mathématiques. L'anxiété que peut causer la pratique des mathématiques semble au cœur des préoccupations. Ainsi, elle est étudiée sous différents angles : les caractéristiques des mathématiques qui peuvent engendrer l'anxiété (Merri et Pichat, 2007), l'anxiété vécue selon les cultures (Gómez Chacón et Figueiral, 2007), les effets physiques de cette anxiété (Lyons et Beilock, 2012), les remédiations possibles (Lafortune, 1992), etc.

Ce champ disciplinaire investit entre autres le domaine des troubles spécifiques de l'apprentissage. L'appellation *trouble d'apprentissage* est de plus en plus présente dans les milieux scolaires. Il s'agit, dans ce cas, d'élèves présentant un trouble instrumental malgré une intelligence normale ou même supérieure à la moyenne (Lussier et Flessas, 2001). Différents troubles (ex. : dysphasie, dyslexie, dysorthographe, dyscalculie) sont identifiés selon les fonctions cérébrales atteintes. Des enfants dits dyscalculiques présenteraient une anomalie dans une région cérébrale essentielle au traitement numérique.

2.1.1 Définition et critères diagnostiques

Il n'existe pas à ce jour une définition faisant l'unanimité sur la dyscalculie développementale¹⁴ (DD). Le plus souvent, les critères diagnostiques sont utilisés, ce qui rend la définition de la DD grandement circulaire (*Expertise collective*, 2007). Selon Fischer (2009a), la DD est définie comme « un trouble dans l'apprentissage du calcul (non lié à des déficiences intellectuelles) qui a son origine dans un désordre cérébral » (p. 115). Ce type de définition s'appuie sur les deux critères principaux de Kosc (1974, in Fischer, 2009a). Le premier est un critère d'inclusion, soit la faiblesse en calcul, alors que le second est un critère d'exclusion, soit un quotient intellectuel (QI) anormalement faible. La majorité des chercheurs dans ce domaine s'entend sur le fait que la DD est liée à des difficultés en calcul et non à des difficultés dans l'ensemble des domaines mathématiques (comme le suggèrent d'ailleurs, à tort, certains sites Internet et revues non scientifiques). Or, encore faut-il s'entendre sur les méthodes pour identifier les personnes qui ont des difficultés en calcul. Par exemple, doit-on s'intéresser au calcul mental, au calcul écrit ou aux deux ? Et comment juge-t-on qu'une personne est faible en calcul ? La référence à la moyenne, comme réponse à cette question, soulève un certain nombre de problèmes, car il n'y a aucun point de discontinuité dans les performances. L'identification d'un trouble dyscalculique devrait alors se faire de façon tout à fait arbitraire, c'est-à-dire en choisissant un résultat à partir duquel un

¹⁴ On distingue deux formes de dyscalculie : la forme acquise (aussi appelée acalculie) et la forme développementale. La forme acquise est consécutive à une lésion cérébrale pouvant être causée, par exemple, par un traumatisme ou une tumeur (les premiers travaux en ce domaine ont porté sur cette forme de dyscalculie). La forme développementale, celle qui nous intéresse ici, consiste quant à elle en un trouble d'apprentissage et de développement spécifique observé au moment de l'acquisition des savoirs mathématiques.

élève n'est plus en difficulté mais en trouble d'apprentissage. De plus, l'utilisation de la moyenne crée inévitablement des profils qui répondent au critère d'inclusion. Concernant le critère d'exclusion qui, rappelons-le, consiste à exclure les personnes qui présentent un QI anormalement faible, il faudrait alors déterminer la façon d'évaluer le QI, ce qui est difficile en raison notamment de la diversité des domaines et des processus cognitifs (Vilette, 2009). Le concept même de QI et la possibilité d'en donner une mesure sont d'ailleurs remis en question par plusieurs chercheurs (Gould, 1997). Plutôt que d'utiliser le QI, Von Aster (2009) propose de comparer la réussite en mathématiques avec les autres savoir-faire scolaires. Or, cette proposition soulève également des critiques, car la dyscalculie est généralement associée à d'autres troubles. Somme toute, un travail important reste à faire pour juger de la pertinence du concept même de la dyscalculie, comme le montre d'ailleurs l'étude de Vannetzel, Eynard et Meljac (2009). Ces chercheurs ont adopté trois méthodes différentes couramment utilisées pour diagnostiquer des sujets dyscalculiques. Non seulement ces méthodes ont conduit à l'identification d'un nombre différent d'élèves dyscalculiques, mais aussi à l'identification du trouble chez des élèves différents.

2.1.2 Prévalence et dyscalculie pure versus dyscalculie avec comorbidités

Étant donné le flou qui entoure les méthodes d'identification des personnes présentant une DD, il n'est pas étonnant que la prévalence de ce trouble varie largement d'une recherche à l'autre. L'*expertise collective* (2007) relate cinq études (conduites entre 1974 et 2004) qui ont porté sur de larges populations. Les critères d'identification varient grandement d'une étude à l'autre et la proportion de sujets dyscalculiques oscille entre 2,3 % et 7,7 %. Des études récentes rapportent une prévalence encore plus faible. Selon l'étude de Fischer (2009b), le pourcentage de personnes dyscalculiques ne dépasserait pas 1,5 %. Ce résultat est similaire à celui de Vannetzel, Eynard et Meljac (2009) qui obtiennent une prévalence de 1 %, et à celui de Fayol et ses collaborateurs (2009) qui obtiennent une prévalence de 1,3 %. Selon Fischer, la méthodologie et les critères utilisés conduiraient certains chercheurs à surestimer ce pourcentage.

Par ailleurs, les chercheurs distinguent généralement la dyscalculie pure (DDp) et la dyscalculie avec comorbidités (DDc). La première consiste en des difficultés spécifiques en calcul, alors que la seconde consiste en une dyscalculie accompagnée d'autres troubles. Comme le souligne Fischer (2009b), les recherches rapportent un plus faible pourcentage de DDp (environ trois fois moins) que de DDc. Les troubles dans le calcul seraient donc généralement associés à d'autres troubles, ce qui est conforté notamment par la recherche de Vannetzel, Eynard et Meljac (2009). Un trouble auquel est souvent associée la DD est celui du langage écrit. En effet, 51 % des élèves identifiés dyscalculiques éprouvent également des difficultés en langage écrit (Ostad, 1998, dans *Expertise collective*, 2007). De plus, selon plusieurs auteurs (Jordan et Montani, 1997; Shalev et coll., 1997; Jordan et Hanich, 2000; Fuchs et Fuchs, 2002, dans *Expertise collective*, 2007), lorsque la DD est accompagnée d'un trouble en langage écrit, le handicap est plus sévère et plus durable en arithmétique que lorsqu'il s'agit d'une DDp. Enfin, la DD n'est pas uniquement associée aux difficultés en langage écrit. Elle présente également une comorbidité particulière avec le trouble de déficit de l'attention avec ou sans hyperactivité (TDA/H) (Shalev et coll., 2005, dans *Expertise collective*, 2007). Il est cependant difficile de déterminer si ces troubles coexistent ou si le déficit de l'attention est à la source des troubles du calcul.

2.1.3 Manifestations de la dyscalculie

Les auteurs semblent davantage s'entendre sur les manifestations de la DD : les enfants dyscalculiques auraient plus de difficulté à assimiler les principes régissant le dénombrement (Gelman et Gallistel, 1978)¹⁵, ils commettraient plus d'erreurs et utiliseraient plus longtemps des procédés élémentaires que les autres enfants dans les calculs simples, ils souffriraient d'une organisation défaillante des faits additifs en mémoire et ils éprouveraient également des difficultés importantes à résoudre des opérations qui impliquent de grands nombres (*Expertise collective*, 2007). Il semble donc que les enfants dyscalculiques diffèrent des autres enfants davantage par l'intensité que par la nature des déficits. Ainsi, aucune recherche

¹⁵ Les principes de Gelman et Gallistel (1978) sont les suivants : le principe de correspondance terme à terme, le principe d'ordre stable, le principe de cardinalité, le principe d'abstraction ainsi que le principe de non pertinence de l'ordre.

à notre connaissance n'indique qu'il faille intervenir différemment auprès d'élèves dyscalculiques que d'élèves en difficulté en mathématiques. Au contraire, les recherches (Kucian et coll., 2006; Rousselle et Noël, 2007; Vannetzel, Eynard et Meljac, 2009) indiquent plutôt que rien ne semble spécifique aux élèves présentant une DD par rapport aux élèves en difficulté en mathématiques ou aux élèves « ordinaires ».

2.2 Les difficultés d'apprentissage en mathématiques selon la psychologie cognitive

La thèse de la psychologie cognitive se différencie de celle de la neuropsychologie en ce qui a trait à la préoccupation neurologique. L'importance attribuée à la localisation des processus déficitaires est beaucoup moins grande dans cette thèse que dans celle de la neuropsychologie. La psychologie cognitive ne s'intéresse pas exclusivement aux troubles neurologiques; elle s'intéresse aussi au fonctionnement cognitif des sujets. Les difficultés en mathématiques sont ainsi expliquées par les lacunes de certaines fonctions nécessaires à leur apprentissage telles que la mémoire, l'attention et les habiletés visuospatiales. Des applications pédagogiques issues des sciences cognitives pensées plus particulièrement pour les élèves en difficulté sont présentées en formations initiale et continue des enseignants. C'est le cas notamment de l'enseignement de stratégies générales d'apprentissage (Tardif, 1992; Weinstein, 1994; Cartier, Debeurme et Viau, 1997), de l'utilisation des styles d'apprentissage pour l'enseignement (Feuerstein et coll., 1995; Büchel et Büchel, 1995) et de la pédagogie différenciée (Battut et Bensimon, 2006; Przesmycki, 2004; Meirieu, 1985). Enfin, les travaux réalisés en psychologie cognitive qui s'intéressent aux mathématiques visent à relever divers processus engagés dans l'apprentissage des mathématiques et, également, à trouver des méthodes pour intervenir auprès d'élèves en difficulté.

2.2.1 Fonctions cognitives impliquées dans l'apprentissage des mathématiques

Pour comprendre pourquoi certains enfants réussissent en mathématiques alors que d'autres ne réussissent pas, même si ces enfants apprennent dans des conditions scolaires équivalentes, des chercheurs se sont intéressés aux fonctions cognitives impliquées dans

l'apprentissage des mathématiques. Les travaux de Luria sont sans aucun doute parmi les premiers à étudier les difficultés en mathématiques en prenant en compte le système de traitement de l'information. Dans les années 1960, Luria s'est intéressé aux difficultés en arithmétique d'adultes ayant subi des dommages cérébraux et associe ces difficultés à des défaillances multiples (défaut de la logique spatiale, défaut dans la planification de la tâche, persévérance dans l'utilisation de procédures qui ne sont plus appropriées et incapacité à effectuer des calculs simples). De tels travaux sont encore réalisés de nos jours et montrent les relations entre l'apprentissage des mathématiques et diverses fonctions cognitives.

Plusieurs études (Montague, 1996; Strang et Rourke, 1985; Zentall et Ferkis, 1993; Geary et coll., 2004) établissent un lien entre les difficultés d'apprentissage en mathématiques et les capacités réduites en mémoire de travail. Une faible mémoire de travail expliquerait les erreurs fréquentes commises par les élèves lorsqu'ils utilisent des procédés de comptage ainsi que les difficultés qu'ils éprouvent à mémoriser les faits arithmétiques.

Les élèves présentant un trouble déficitaire de l'attention avec ou sans hyperactivité (TDA/H) auraient également plus de difficulté en mathématiques que leurs pairs (Zentall et Ferkis, 1993). Une faiblesse au niveau de la mémoire de travail et de la lecture étant souvent associée au TDA/H, ces élèves auraient plus particulièrement des difficultés en résolution de problèmes. Ils auraient notamment de la difficulté à gérer plusieurs informations simultanément. De plus, une certaine lenteur dans l'exécution des calculs serait fréquente chez les élèves TDA/H, ce qui augmenterait la charge attentionnelle et rendrait difficile la réussite en résolution de problèmes. Comme le soulignent Strang et Rourke (1985), des problèmes au niveau de l'attention engendreraient par ailleurs des difficultés à assimiler le contenu des leçons et causeraient des difficultés croissantes à respecter les étapes dans l'exécution d'algorithmes ou dans la résolution de problèmes.

Selon certains auteurs (Englert, Culatta et Horn, 1987; Montague, 1996; Jordan, Hanich et Kaplan, 2003), les habiletés en langage seraient essentielles pour réussir en mathématiques, notamment pour la compréhension de problèmes mathématiques avec énoncé. Pour expliquer le nombre considérable d'élèves en difficulté en mathématiques qui éprouvent également des difficultés en français, Fayol et ses collaborateurs (2009) identifient de nombreux facteurs communs à l'apprentissage des mathématiques et à celui du français, tels que le niveau

langagier, l'attention, la capacité de la mémoire de travail et la vitesse de traitement. Le lien particulier entre la lecture et les mathématiques constituerait également un facteur explicatif, c'est-à-dire que les difficultés en mathématiques, et plus particulièrement celles en résolution de problèmes écrits, pourraient provenir de difficultés en lecture concernant le décodage et/ou la compréhension. En plus d'affirmer la relation entre la réussite en mathématiques et celle en lecture, l'étude de Fayol et ses collaborateurs (2009) montre que les épreuves mathématiques faisant appel aux traitements symboliques (par exemple, les opérations écrites) sont plus liées aux performances en lecture que les épreuves de quantification. On ne peut cependant généraliser ce constat à l'ensemble des élèves. Il arrive effectivement qu'un élève réussisse bien en lecture et en quantification, mais qu'il éprouve par ailleurs des difficultés dans les tâches liées aux traitements symboliques.

Les problèmes concernant les habiletés visuospatiales sont également associés aux difficultés en mathématiques (Garnett, 1992; Badian, 1983, dans *Expertise collective*, 2007). Ils engendreraient notamment des difficultés en géométrie, des difficultés pour lire des graphiques, un mauvais alignement des chiffres lors d'opérations écrites et des difficultés à différencier certains nombres tels que 6 et 9 ou encore 17 et 71. De plus, un déficit des habiletés visuospatiales pourrait perturber la construction de la représentation spatiale des nombres sur la ligne numérique, ce qui aurait un impact sur l'ensemble des activités numériques (Von Aster, 2000, dans *Expertise collective*, 2007).

D'autres chercheurs s'appuient sur le concept d'abstraction réfléchissante de Piaget pour expliquer les difficultés en mathématiques. Selon Fischer (2009b), par exemple, une des spécificités des mathématiques est qu'elles nécessitent cette forme particulière d'abstraction qu'est l'abstraction réfléchissante. Ainsi, pour comprendre la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, un enseignant peut montrer que $6 \times (9 + 7) = 6 \times 9 + 6 \times 7$ puisque $6 \times 16 = 54 + 42$; les deux résultats correspondent effectivement à 96. L'enseignant peut présenter plusieurs exemples semblables, mais peu importe le nombre d'exemples, rien ne prouve que cette « règle » fonctionne toujours. La compréhension de la propriété, illustrée par ces exemples, ne peut reposer strictement sur l'abstraction empirique. Ce serait, selon Fischer, l'abstraction réfléchissante qui rendrait possible la généralisation. Les difficultés spécifiques en mathématiques qu'éprouvent certains élèves pourraient ainsi

s'expliquer par un défaut du processus d'abstraction réfléchissante, lequel serait essentiel pour se détacher du matériel, des contextes et des exemples, et ainsi dégager les objets mathématiques et leurs propriétés. Une telle explication revient cependant à considérer que la difficulté rencontrée relève d'un déficit propre à l'élève, bien qu'elle ne soit pas, dans ce cas-ci, déterminée par sa condition neurologique.

2.2.2 Psychologie cognitive et intervention en mathématiques

Selon Brownell, Mellard et Deshler (1993), les élèves en difficulté d'apprentissage auraient de la difficulté à identifier les stratégies appropriées lors de résolution de problèmes, à organiser l'information, à respecter la démarche de résolution et à évaluer la justesse de leur solution. Pour aider ces élèves, des chercheurs ont donc tenté de rendre explicites les différentes étapes nécessaires pour résoudre tout problème mathématique. Un précurseur dans le domaine est sans aucun doute le mathématicien Georges Polya, qui publiait, en 1945 (traduit en français en 1965), un ouvrage sur la résolution de problèmes mathématiques. Polya identifie quatre grandes étapes : comprendre le problème, concevoir un plan, exécuter le plan et réviser l'ensemble du travail. Dans le domaine de la psychologie cognitive, des dispositifs d'aide à la résolution de problèmes ont par la suite été développés, c'est le cas notamment du programme *Solve It* (Montague, 1992, 1997; Montague, Warger et Margan, 2000) et de la démarche RIDD (Read, Imagine, Decide and Do) (Jackson, 2002). Ces programmes, conçus essentiellement pour aider les élèves en difficulté d'apprentissage, proposent ainsi une démarche de résolution de problèmes en un certain nombre d'étapes à respecter.

D'autres modèles d'intervention en mathématiques ont été développés. Celui de Bottge (2001), par exemple, s'appuie sur la relation entre des conditions favorisant l'apprentissage des mathématiques et des qualités que doivent développer les apprenants. La première condition est la présentation de problèmes signifiants, lesquels permettraient de développer

l'engagement des élèves¹⁶. La deuxième condition est l'enseignement explicite de stratégies qui permettrait aux élèves, et plus particulièrement aux élèves en difficulté, de développer les bases nécessaires pour réussir en mathématiques. Pour développer l'intuition, qui est selon divers chercheurs essentielle à la réussite en mathématiques, la troisième condition consiste à encourager les élèves à inventer et à utiliser leurs propres techniques pour résoudre des problèmes et pour trouver la solution à des calculs. L'enseignant doit ensuite aider les élèves à établir la relation entre leurs connaissances informelles et les connaissances formelles. Bottge appelle *Situational Cognition* la quatrième condition, qui vise à favoriser le transfert des apprentissages¹⁷. Pour ce faire, il conviendrait d'amener les élèves à être attentifs aux conditions dans lesquelles une connaissance est utilisée. La dernière condition du modèle de Bottge est que l'enseignant doit croire en chacun de ses élèves; les attentes de l'enseignant vis-à-vis des élèves influenceraient sa pratique et pourraient, par conséquent, avoir un impact considérable sur leur performance. Ce type de modèles d'intervention fait appel à des principes qui peuvent paraître paradoxaux. Par exemple, faut-il privilégier l'enseignement explicite ou, plutôt, amener les élèves à développer leurs propres stratégies ? La difficulté à enseigner, il nous semble, tient justement à cette articulation entre ce que l'élève sait et le savoir à construire. Il ne s'agit pas de deux savoirs à mettre en relation; il s'agit d'un même savoir qui doit prendre sens pour l'élève en situation et, en même temps, être un objet de savoir partagé par une communauté.

2.3 Les difficultés d'apprentissage en mathématiques selon une perspective didactique

La didactique des mathématiques est définie par Brousseau (1998) comme la science qui étudie les conditions de transmission et d'appropriation des savoirs mathématiques. Toutes théories didactiques s'intéressent à l'articulation entre l'apprentissage et l'enseignement d'un

¹⁶ Notons, à ce propos, que divers auteurs, qui s'inscrivent dans le champ de la psychologie cognitive mais également dans celui de la didactique (Parmar et Cawley, 1991; Sensevy, 1998; Blouin et Lemoyne, 2002), qualifient d'apprenants passifs les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques.

¹⁷ Les élèves en difficulté auraient, selon Perrin-Glorian (1993) et Brownell, Mellard et Deshler (1993), des difficultés à réinvestir leurs connaissances dans de nouveaux contextes.

contenu mathématique¹⁸. Ainsi, ce qui distingue essentiellement les approches cognitives et didactiques est qu'une perspective didactique conduit à prendre en compte la spécificité des savoirs en jeu et la situation dans laquelle ces savoirs sont sollicités. Les recherches en didactique étudient ainsi les caractéristiques que doivent posséder les situations mathématiques pour favoriser l'apprentissage de savoirs ciblés¹⁹.

Dans cette section, nous décrivons, dans un premier temps, quelques phénomènes didactiques propres au contexte de l'adaptation scolaire ou, plus particulièrement encore, à celui de l'orthopédagogie. Nous présentons ensuite des études qui ont mis à l'épreuve des situations construites sur la base de la *Théorie des situations didactiques* (TSD) (Brousseau, 1998) dans le contexte de l'adaptation scolaire. Les limites qu'elles relèvent et les propositions suggérées pour les surmonter sont identifiées.

2.3.1 Prise en compte du contexte dans lequel se déroulent les apprentissages

Pour rendre compte des difficultés des élèves, Brousseau a choisi d'investiguer non pas leurs aptitudes intellectuelles, mais plutôt les interactions entre l'enseignant, les élèves et le savoir. Un concept central de la TSD est le contrat didactique, c'est-à-dire l'ensemble des comportements qui ont trait aux interactions maître-élèves liées au savoir en jeu, tant les comportements des élèves attendus par le maître que ceux du maître attendus des élèves²⁰. Ce concept a été introduit par Brousseau à la suite d'une séquence d'enseignement avec Gaël (Brousseau et Warfield, 1981), un élève en échec électif²¹ en mathématiques, qui refusait de s'investir dans la tâche et ne pouvait supporter l'incertitude. Au lieu de s'engager dans le

¹⁸ Il est à noter que l'approche dite anthropo-didactique, en plus de tenir compte de la dimension didactique (des caractéristiques du savoir dans l'interaction enseignement/apprentissage), tient compte de la dimension anthropologique, c'est-à-dire des arrière-plans culturels des élèves et des cultures pédagogiques dans lesquelles ils évoluent, permettant ainsi d'expliquer la manière dont ils se positionnent à l'égard de ce qui n'est pas enseigné, mais néanmoins attendu par l'enseignant (Sarrazy, 2007).

¹⁹ Il serait cependant réducteur de distinguer l'approche cognitive de l'approche didactique en identifiant la première à l'apprentissage et la seconde, à l'enseignement. En effet, des recherches en sciences cognitives proposent des méthodes d'enseignement (mais sans tenir compte de la spécificité du savoir mathématique), alors que des recherches en didactique s'intéressent à l'apprentissage des élèves (mais en tenant compte de l'enseignement et de la spécificité du savoir).

²⁰ Précisons que contrairement au contrat pédagogique général, le contrat didactique est lié aux connaissances en jeu.

²¹ Un élève en échec électif en mathématiques est un élève qui éprouve des difficultés en mathématiques, mais qui n'en éprouve pas dans les autres matières.

problème et de prendre des décisions qui lui appartenaient, Gaël cherchait à se conduire comme on lui avait montré, ce qui lui évitait d'avoir à se justifier. Il pouvait ainsi se contenter d'affirmer qu'il avait fait ce que l'enseignant lui avait appris. Il arrive effectivement que des élèves, pour parvenir à une réponse conforme, ajustent leurs conduites en interprétant les commentaires, les questions et le non-verbal de l'enseignant plutôt que par un investissement centré sur le contenu de la tâche. Par l'analyse du cas de Gaël, Brousseau fait ressortir les clauses implicites qui régissent les rapports didactiques pour l'ensemble des partenaires de la relation didactique. Enfin, le concept de contrat didactique, qui est une pierre d'assise de la TSD, est un instrument théorique puissant dans l'étude des rapports entre l'enseignement et l'apprentissage en contexte de difficultés scolaires.

2.3.1.1 Phénomènes didactiques propres à l'adaptation scolaire

Divers travaux en didactique des mathématiques ont étudié les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage en adaptation scolaire. Comme l'indique Favre (2004), des aménagements spécifiques sont généralement prévus pour les classes d'adaptation scolaire afin de tenir compte des difficultés, des troubles et des handicaps des élèves de ces classes. Par exemple, les effectifs de ces classes sont réduits; alors que les classes ordinaires comptent une vingtaine d'élèves, les classes d'adaptation reçoivent de 5 à 12 élèves. De plus, une équipe pluridisciplinaire (enseignant, psychoéducateur, psychologue, technicien en éducation spécialisée, etc.) est formée pour soutenir adéquatement les élèves et l'enseignant. Les études conduites dans le champ de l'adaptation scolaire ont permis d'identifier des phénomènes didactiques propres à ce contexte : l'individualisation de l'enseignement et la centration sur les erreurs, l'anticipation de l'échec, le ralentissement du temps didactique, le surinvestissement d'un même type de tâches, le morcellement du savoir ainsi que ce que Roiné (2009) appelle la *cécité didactique*.

L'individualisation de l'enseignement, en contexte d'adaptation scolaire, s'expliquerait non seulement par le nombre restreint d'élèves dans un groupe et leurs besoins particuliers, mais aussi par la difficulté à conduire des activités collectives en raison de la fluctuation importante du groupe. Cette fluctuation est causée notamment par le haut taux d'absentéisme,

par les rencontres auprès d'autres intervenants (ex. chez le technicien en éducation spécialisée) et par l'intégration progressive de certains élèves en classe ordinaire. L'individualisation de l'enseignement et la souplesse à l'égard du programme conduit souvent à orienter l'enseignement en fonction des erreurs commises par les élèves (Cange et Favre, 2003; Giroux, 2004). Les élèves des classes spéciales seraient ainsi plus sollicités par l'enseignant que ceux des classes ordinaires pour expliciter leur démarche et montrer qu'ils ont compris (Favre, 1997). Selon Giroux (2004), le repérage et le traitement d'erreurs sont d'ailleurs considérés, par les enseignants en adaptation scolaire, comme une spécificité de leur fonction.

Comme les classes d'adaptation scolaire sont formées d'élèves qui éprouvent des problèmes particuliers, les enseignants anticipent les difficultés, ce que Favre (2004) appelle l'échec potentiel. Cette anticipation a un impact dans le choix des objets d'enseignement proposés et dans la façon de les présenter. Cette composante de l'échec donnerait notamment naissance à des formes d'effet Jourdain (Brousseau, 1998) inversées : au lieu de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements banals de l'élève, l'enseignant, peu préparé à voir un succès survenir, interprète comme des comportements banals des conduites de l'élève qui reposent pourtant sur des connaissances savantes. Dans le même ordre d'idées, Assude et coll. (2014) affirment que les enseignants qui œuvrent auprès d'élèves en situation de handicap auraient tendance à sous-estimer leur capacité en mathématiques et à rejeter des situations qui sont pourtant adaptées à leurs connaissances.

Les études relèvent aussi une différence dans les systèmes ordinaire et spécialisé concernant la progression du temps didactique. Le ralentissement dans l'avancée du savoir en classe d'adaptation scolaire ne s'expliquerait pas uniquement par les difficultés des élèves. La souplesse concernant le respect du programme et le rapport à l'erreur conduiraient également au ralentissement du temps didactique. Selon l'étude de Cherel et Giroux (2002), en classe ordinaire, les contenus sont fractionnés et travaillés sur une courte durée, tandis qu'en classe spéciale, un même thème est travaillé sur une longue durée (de deux à cinq mois). Ainsi, dans la classe spéciale, les contenus qui semblent moins importants ou trop difficiles sont laissés de côté, ce qui permet d'accorder davantage de temps aux contenus jugés essentiels. Pour s'assurer que les élèves ont bien compris, l'enseignant prend généralement le temps

d'interroger tous les élèves, ce qui contribue bien entendu au ralentissement du temps didactique.

Favre (2004) note également une multiplication d'activités visant un même objectif d'enseignement. Les tâches proposées aux élèves des classes spéciales seraient moins variées dans la présentation et dans la formulation des consignes que celles des classes ordinaires. Le surinvestissement d'un même type de tâches s'accompagne cependant, selon Conne (1992), d'un désinvestissement des élèves. Dans le même ordre d'idées, Giroux et René de Cotret (2001) relèvent une forme d'économie dans l'exposé du savoir ainsi qu'une algorithmisation des objets de savoir dans une classe de doubleurs au secondaire. Pour trouver des accès plus faciles à la production de bonnes réponses, la tâche est ainsi morcelée pour en réduire la complexité. Bien qu'il arrive effectivement que le morcellement permette à l'élève de réussir une tâche donnée, cette réussite est souvent locale, c'est-à-dire que l'élève ne peut adapter sa conduite à de nouveaux contextes.

La pression exercée sur les enseignants, qui œuvrent auprès d'élèves en difficulté, pour développer des outils adaptés à leurs particularités cognitives, provoque, selon Roiné (2009), un effet de cécité didactique qui consiste en une « impossibilité de reconnaître en quoi la situation didactique possède ou ne possède pas de propriétés spécifiques nécessaires et suffisantes à la construction de tel ou tel savoir déterminé » (p. 309-310). En effet, considérant que l'échec ou la réussite repose avant tout sur l'élève, l'enseignant s'interroge peu à l'égard de l'effet du contenu d'enseignement sur l'apprentissage. La « psychologisation » de l'enseignement conduirait ainsi, selon Roiné, à nier l'épistémologie des savoirs, qui sont historiquement et culturellement situés, et à nier que la transmission des savoirs est la principale fonction de l'école. Ainsi, l'enseignement n'est plus pensé en fonction des particularités culturelles du savoir enseigné, mais de façon à s'adapter aux caractéristiques cognitives des élèves.

2.3.1.2 Problématisation didactique des interactions en contexte orthopédagogique

Deux éléments se dégagent concernant la spécificité des interactions didactiques en orthopédagogie. Le premier est relatif aux phénomènes didactiques propres à l'aide

individualisée, et le second concerne la participation d'un même élève à deux systèmes didactiques parallèles, l'orthopédagogie et la classe ordinaire.

Les études portant sur les phénomènes didactiques propres à l'adaptation scolaire ont surtout été réalisées dans le cadre d'un enseignement collectif. Or, les données dont nous disposons sur le fonctionnement didactique dans le cadre orthopédagogique permettent de supposer que ces phénomènes caractérisent également les interactions didactiques dans l'enseignement individuel ou de petits groupes. Effectivement, en orthopédagogie, tout comme dans les classes d'adaptation scolaire, l'enseignement est individualisé, les orthopédagogues travaillent avec des élèves réputés en difficulté et ils n'ont pas la pression de respecter le programme au même titre que les enseignants des classes ordinaires. Certains phénomènes didactiques relevés pour l'adaptation scolaire pourraient même être accentués en contexte orthopédagogique en raison du poids du contrat explicite d'aide qui le caractérise. Une étude de cas réalisée par Mary (2003) montre effectivement le lien de dépendance qui s'établit entre un élève et l'orthopédagogue dans le cadre d'une intervention individualisée en mathématiques. Tout comme dans le cas de Gaël (Brousseau et Warfield, 1981), l'élève cherche des indices sur la tâche dans les consignes de l'intervenante plutôt que de s'investir réellement dans la recherche d'une solution au problème. Or, selon Mary, les difficultés dans l'intervention seraient non seulement causées par la proximité de l'intervenante et de l'élève, mais aussi par la nature de l'intervention qui propose une démarche de résolution de problèmes et qui ne repose pas sur une analyse des tâches à réaliser.

Dans le même ordre d'idées, Matheron et Noirfalise (2002) exposent certaines limites de l'aide individualisée²², dont la déresponsabilisation de l'élève. En classe, l'enseignant a la responsabilité de créer les conditions permettant aux élèves de s'appropriier les connaissances, et l'élève, celle de satisfaire ces conditions. Lorsque la majorité des élèves réussit, les difficultés d'un élève lui sont imputables. Ainsi, s'il souhaite réussir comme les autres, l'élève qui rencontre des difficultés devra faire plus d'efforts, étudier davantage, être plus attentif en classe, etc. Selon Matheron et Noirfalise, en installant un dispositif d'aide

²² L'aide individualisée dans les lycées français dont parlent les chercheurs correspond grosso modo au service orthopédagogique du Québec. Cette aide porte sur les mathématiques et le français et elle est apportée par un enseignant qui rencontre à raison d'une heure par semaine de petits groupes d'élèves provenant de la même classe ou non.

individualisée, il revient à l'institution scolaire, et donc aussi à l'enseignant, de trouver de nouvelles conditions pour permettre aux élèves en difficulté de développer les connaissances visées.

Les interventions en aide individualisée, tout comme en orthopédagogie, portent généralement sur des contenus qui ont déjà été traités et évalués en classe, ce qui soulève la question de la participation d'un même élève à deux systèmes didactiques parallèles. Il s'avère effectivement intéressant de s'interroger sur les spécificités d'une intervention portant sur un contenu qui a déjà été enseigné à l'élève, et ce, par un autre intervenant. Nous nous référons au concept de *mémoire didactique* pour discuter de cette question.

La mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991) permettrait notamment à l'enseignant d'évoquer « des faits de classe qui ne sont pas objets d'enseignements mais qui importent pour l'apprentissage » (p. 172). L'enseignant peut ainsi faire référence à une situation vécue en classe pour permettre à un élève d'utiliser une connaissance non décontextualisée ou, au contraire, rappeler ce qui a été institutionnalisé pour permettre à l'élève d'abandonner une méthode peu efficace. Qu'advient-il alors de cette mémoire qui appartient à l'histoire de la classe pour un élève qui prolonge ses apprentissages dans un autre lieu, dans une autre institution comme l'orthopédagogie ? Il est bien connu, sur le terrain, que l'orthopédagogue n'a pas (ou a peu) accès à ce qui est fait en classe et donc, à sa mémoire didactique. Par conséquent, il ne lui est pas possible d'y faire référence, ni pour aider l'élève ni pour interpréter ses conduites. Du point de vue des élèves, la question de la mémoire didactique est également intéressante. En effet, selon Brousseau et Centeno (1991), la mémoire didactique permettrait aux élèves d'évoquer des connaissances qui leur sont difficiles à exprimer, en faisant référence à une situation vécue en classe connue par l'enseignant. Ainsi, en orthopédagogie, certaines formes de connaissances peuvent difficilement être, d'une part, exprimées par les élèves et, d'autre part, accessibles à l'orthopédagogue. Enfin, chaque système aurait sa propre mémoire didactique et donc, ses propres règles de fonctionnement, ce qui pourrait induire un fonctionnement local des connaissances.

Somme toute, considérant que l'élève est le sujet de deux institutions parallèles et que l'enseignant titulaire et l'orthopédagogue ont tous les deux une connaissance limitée, voire superficielle, des enjeux didactiques du système parallèle au sien, il reviendrait donc à l'élève

d'assumer la liaison entre les deux institutions. L'établissement de cette liaison semble ainsi être un problème didactique spécifique à l'intervention orthopédagogique, d'autant plus que les savoirs des élèves en difficulté ont bien souvent un caractère local.

Aussi, comme les interventions en orthopédagogie portent sur les difficultés qu'éprouve l'élève, ce dernier est souvent entraîné à réussir face à des contenus qui ont le plus souvent déjà été évalués (Matheron et Noirfalise, 2002). Se centrer sur les difficultés spécifiques de l'élève pourrait conduire à mettre en valeur un contrat dépassé, plutôt que les aspects vifs du savoir en cours d'enseignement.

2.3.2 Mise à l'épreuve des situations didactiques dans le contexte de l'adaptation scolaire

La *Théorie des situations didactiques* (TSD) (Brousseau, 1998), en plus de modéliser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage, porte sur les conditions auxquelles doit répondre un dispositif d'enseignement pour favoriser l'apprentissage. Des chercheurs (Perrin-Glorian, 1993; Bloch et Salin, 2004; Salin, 2007a, 2007b; Giroux, 2013) identifient cependant des difficultés dans la mise en œuvre de situations basées sur la TSD dans le contexte de l'adaptation scolaire, et avancent des propositions visant à surmonter ces difficultés.

Dans cette section, nous résumons d'abord les conditions vers lesquelles un dispositif optimal doit tendre pour favoriser l'apprentissage selon la TSD, et nous décrivons ensuite les difficultés rencontrées dans la mise à l'épreuve de situations didactiques en contexte d'adaptation scolaire.

2.3.2.1 Les conditions d'un dispositif d'enseignement selon la TSD

Dans la TSD, la situation didactique est encadrée de deux processus d'enseignement : la dévolution d'une situation adidactique et l'institutionnalisation des connaissances. La situation adidactique vise à faire produire par les élèves la connaissance visée en tant que solution à un problème. Elle génère ainsi des connaissances locales, c'est-à-dire des

connaissances qui sont adéquates pour résoudre le problème présenté, mais qui peuvent se révéler insuffisantes ou même fausses dans d'autres circonstances. La construction autonome d'une connaissance ne permet donc pas, à elle seule, d'accéder au savoir socialement reconnu. Ainsi, l'enseignant a non seulement la responsabilité de dévoluer la situation adidactique, c'est-à-dire de faire accepter à l'élève la responsabilité de trouver une solution au problème, mais aussi celle d'institutionnaliser le savoir. Pour que les connaissances produites au moment de la situation adidactique se transforment en savoirs, il doit effectivement y avoir une dépersonnalisation et une décontextualisation de façon à dégager, dans la solution apportée au problème, ce qui a un caractère universel et qui pourra être utilisé pour résoudre d'autres problèmes.

Un concept central de la TSD est celui de « situation adidactique ». Une situation adidactique consiste en une forme de situation didactique, c'est-à-dire qu'elle est organisée par l'enseignant avec une intention didactique. Or, elle est dite « adidactique », car l'intention vis-à-vis l'objet d'apprentissage ciblé ne doit pas être apparente. Comme le souligne Brousseau (1998) :

L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. (p. 59)

L'enseignant devrait donc, idéalement, s'abstenir d'intervenir à propos du savoir en jeu, car ce qu'il entreprend pour faire produire à l'élève les comportements attendus prive au contraire celui-ci des conditions nécessaires à la construction du savoir visé. Ainsi, « si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir » (p. 73). Enfin, une situation adidactique est pensée de façon à permettre le fonctionnement autonome des élèves dans des situations faisant appel aux savoirs enseignés. Le fonctionnement du savoir en situation est au cœur de la TSD, qui s'intéresse au rapport d'adéquation entre la situation et le savoir visé.

Tout comme dans le jeu, dans une situation adidactique, des règles sont définies permettant aux élèves d'identifier ce qu'est un succès et ce qu'est un échec. Le choix des situations proposées par l'enseignant est déterminant. D'abord, elles doivent être à la portée des élèves, c'est-à-dire que leurs connaissances doivent leur permettre d'agir, de parler et de réfléchir, mais elles doivent également se révéler inefficaces pour trouver immédiatement la solution au problème. Ainsi, pour réussir la tâche, les élèves sont amenés à faire des accommodations, à modifier leur système de connaissances. Les élèves agissent sur le milieu qui les informe, en retour, de la réussite ou de l'échec de leur action. Le va-et-vient entre les actions des élèves et les rétroactions du milieu amène ces derniers à anticiper la réponse du milieu et à modifier leur stratégie, favorisant ainsi l'adaptation de leurs connaissances. Pour que les élèves comprennent que la connaissance enseignée est entièrement justifiée par la logique interne de la situation présentée, l'enseignant doit s'abstenir de proposer les connaissances qu'il souhaite voir apparaître. Comme l'indique Brousseau (1998), il s'agit « non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales – parmi celles auxquelles elles s'opposent – pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi » (p. 127). Ainsi, la situation est pensée de sorte que la solution optimale au problème soit la connaissance visée par l'enseignement. Les situations devraient donc être spécifiques à chaque connaissance visée.

En situation adidactique, certaines stratégies mises en œuvre par les élèves sont non gagnantes (elles mènent la plupart du temps à un échec), d'autres sont gagnantes mais peu efficaces (elles permettent de gagner, mais elles sont coûteuses, par exemple en temps), et d'autres sont à la fois gagnantes et efficaces (elles nécessitent l'utilisation de la connaissance visée par la situation). Les erreurs ne sont pas le fruit du hasard : elles résultent de connaissances « antérieures » de l'élève, qui jusque-là avaient leur intérêt. Elles sont, en ce sens, le plus souvent prévisibles. Lors de la planification d'une séquence d'enseignement, il convient d'envisager les solutions que les élèves peuvent produire et de comparer leur efficacité, ce qui permet de faire des hypothèses sur les variables didactiques. Celles-ci consistent en des éléments choisis par l'enseignant pour modifier les stratégies de solution des élèves en vue de les amener vers le savoir visé par l'enseignement.

En plus de permettre une progression dans les stratégies possibles pour solutionner le problème proposé, le jeu sur les variables didactiques permet de faire fonctionner le savoir sous ses différentes formes. Brousseau (1998) identifie effectivement différents types de situations adidactiques, aussi appelées « dialectiques » en raison de leur caractère dynamique. Il s'agit des dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation. Ces catégories sont emboîtées : une situation de validation est une situation de formulation qui constitue une forme d'action. Dans la dialectique de l'action, les élèves font face à une situation qui leur pose problème et, donc, qui les porte à se questionner et à rechercher des solutions. Ils expriment leur choix non pas par des codages linguistiques, mais directement par leur action sur le milieu. Il s'agit donc de connaissances qu'ils peuvent utiliser, mais qu'ils ne sont pas nécessairement en mesure de nommer et d'expliquer. La dialectique de la formulation vise à amener les élèves à expliciter les outils implicites engagés dans la première dialectique. Pour ce faire, une situation de communication peut être proposée durant laquelle un ou des élèves émetteurs doivent échanger des informations avec un ou plusieurs élèves récepteurs. Un schéma classique est que des élèves émetteurs, pour réussir la tâche, doivent décrire à des élèves récepteurs l'action qu'ils devront effectuer. Précisons qu'il ne s'agit pas d'agir sur le récepteur, mais d'agir sur le milieu par son intermédiaire. Les rétroactions favorisent l'émergence de messages de plus en plus justes et économiques. Enfin, contrairement à la dialectique de la formulation où l'émetteur et le récepteur ont des rapports dissymétriques (ils ne possèdent pas les mêmes informations relatives à la tâche), la dialectique de la validation place les élèves dans des positions symétriques (les élèves disposent des mêmes informations et des mêmes moyens d'action) : ils cherchent tous à atteindre la vérité. Pour atteindre le but, un élève doit obtenir l'accord des autres en justifiant ses actions (rappelons qu'un message formulé est une forme d'action). Les élèves doivent donc mettre en œuvre des mécanismes de preuve pour convaincre les autres (et souvent aussi se convaincre eux-mêmes), ce qui exige un questionnement qui porte sur les mathématiques.

Dans une situation adidactique, l'élève agit sur un milieu avec un objectif précis, et le milieu l'informe sur la validité de ses actions. Il peut ainsi modifier ses conduites, ce qui témoigne d'une modification des connaissances. Il y a donc une évolution dans les jeux de l'élève avec le milieu. Le modèle de la structuration du milieu de Brousseau (1990) permet, par une

« articulation en oignon », de représenter de quelle façon le milieu s'enrichit. La situation adidactique englobe les trois premières articulations, c'est-à-dire les interactions de l'élève avec les milieux matériel, objectif et de référence. Les interactions avec le milieu matériel permettent la compréhension des règles du jeu, celles avec le milieu objectif permettent de mettre en œuvre des stratégies, efficaces ou inefficaces, en connaissant l'enjeu de la situation, et celles avec le milieu de référence permettent à l'élève de réfléchir sur la situation objective et ainsi, d'anticiper les réponses du milieu pour bonifier ses stratégies. Subséquemment, l'enseignant et l'élève portent un regard sur la situation adidactique. À partir de ce moment, l'élève ne réfléchit plus seulement au problème proposé, mais aussi aux connaissances qu'on cherche à lui faire acquérir dans le cadre scolaire. Il s'agit alors de la situation didactique, qui englobe la situation adidactique. L'enseignant procède finalement à une institutionnalisation du savoir culturel et, avec les élèves, fait le lien avec ce qui a été réalisé lors de la situation adidactique.

2.3.2.2 Mise à l'épreuve de situations didactiques en adaptation scolaire : limites identifiées et perspectives envisagées

Perrin-Glorian (1993), Bloch et Salin (2004), Salin (2007a, 2007b) et Giroux (2013) ont identifié certaines difficultés dans la mise en œuvre de situations basées sur la TSD dans le contexte de l'adaptation scolaire et avancent quelques propositions afin de les surmonter.

- Perrin-Glorian (1993)

Perrin-Glorian (1993) observe les difficultés qu'éprouvent certains élèves dans la décontextualisation de leurs connaissances et suggère que l'institutionnalisation, plutôt que de se faire à la fin du processus, se déroule tout au long de l'enseignement et qu'elle soit ainsi un moteur de l'avancement du contrat didactique. Dans le déroulement de la situation adidactique, l'enseignant ne peut dévoiler la connaissance visée : non seulement cela empêcherait les élèves de construire eux-mêmes leurs apprentissages, mais le jeu n'aurait

alors plus aucun intérêt. L'enseignant peut cependant éclairer les élèves sur certaines connaissances mobilisées au cours de la situation pour mettre en place les conditions qui permettront aux élèves d'accéder à l'institutionnalisation du savoir. Les moments d'institutionnalisation, au cours de la situation adidactique, permettent de mettre en valeur les éléments importants et donc, d'éviter que certains élèves retiennent des éléments du contexte qui ne sont pas pertinents pour la compréhension du savoir. Douady (1984) parle alors d'institutionnalisation locale où l'enseignant sélectionne, dans ce qui a été fait et dit par les élèves, ce qui est mathématiquement intéressant et « réinvestissable ». Contrairement à l'institutionnalisation où sont présentées des connaissances décontextualisées et dépersonnalisées, l'institutionnalisation locale reste attachée au contexte. Ainsi, les institutionnalisations locales qui ont lieu au cours de la situation adidactique préparent à l'institutionnalisation qui se fera au terme de la situation.

Perrin-Glorian introduit par ailleurs les « situations de rappel » où les élèves doivent se rappeler et mettre des mots sur ce qu'ils ont fait dans des séances précédentes. Deux types de situations de rappel sont présentés. Le premier porte sur le rappel d'une situation d'action. Pour rappeler ce qui s'est passé, les élèves doivent repenser le problème et les procédures mises en place pour le résoudre, et donc élaguer les détails. Ce type de situations de rappel favoriserait une homogénéisation de la classe, une dépersonnalisation des solutions d'élèves (en ce sens qu'ils sont amenés à exposer des stratégies qui ont été utilisées par d'autres élèves) et une pré-décontextualisation des connaissances. Le deuxième type de situations de rappel porte sur une suite de problèmes sur un même thème et permet ainsi d'ancrer les savoirs nouveaux dans des savoirs anciens. Il se rapporte à ce que Perrin-Glorian appelle l'institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes. L'institutionnalisation de certaines relations vise à permettre le réinvestissement d'une connaissance d'un contexte à l'autre.

- Bloch et Salin (2004), Salin (2007a, 2007b)

Bloch et Salin (2004) s'intéressent à l'analyse des difficultés rencontrées en sections d'enseignement général et professionnel adapté (S.E.G.P.A.)²³ lors de l'introduction de situations à composante adidactique. Selon leurs observations, le retour au milieu objectif est parfois interprété, par les élèves de ces classes, comme une régression. Ils adoptent ainsi des conduites de fuite en cherchant, par exemple, à changer d'activités. De plus, comme ils travaillent habituellement à partir de tâches parcellisées, ils ont de la difficulté à s'engager dans les problèmes complexes. L'apprentissage d'une notion en mathématiques se réduirait, selon leur conception, à la présentation d'un ostensif emblématique. Étant donné qu'ils sont bien souvent à la demande de savoirs définitifs, lorsque les enseignants introduisent une notion à partir d'une situation à dimension adidactique, l'usage qui en est fait se limite bien souvent aux usages dans le milieu objectif. Il y aurait ainsi rapidement arrêt du processus interprétatif. Une autre difficulté à introduire des situations adidactiques est qu'il ne s'agit généralement pas, dans ces classes, d'introduire de nouveaux savoirs, mais plutôt de donner du sens à des savoirs qui ont déjà été enseignés. L'enseignant en S.E.G.P.A. doit ainsi organiser une situation qui place les élèves face à des manifestations d'un savoir qui se réduisait, jusque-là, à des algorithmes dont ils ne comprennent pas le sens. C'est aussi ce qui caractérise souvent le contexte orthopédagogique.

Salin (2007a), à la suite de la recherche conduite avec Bloch (Bloch et Salin, 2004), s'interroge sur les caractéristiques que doit posséder une situation pour favoriser le passage d'une connaissance locale à un savoir culturel. Pour ce faire, elle s'appuie sur le modèle de la structuration du milieu de Brousseau (1990), qui permet d'analyser les positions possibles de l'élève dans ses interactions avec le milieu. Elle propose une confrontation régulière à des situations avec rétroactions de la situation objective, pour ainsi amener les élèves à réfléchir sur des solutions qu'ils ont fournies spontanément, permettant ainsi de passer d'une posture de l'élève en action à celle de l'élève en réflexion. La chercheuse insiste par ailleurs sur la mise en place de situations « épurées au maximum de tout ce qui dans le contexte, pourrait gêner l'élève dans son retour sur ses propres actions » (p. 205). Par exemple, lors d'une

²³ Rappelons que ces classes regroupent des élèves en grande difficulté scolaire âgés entre 12 et 16 ans.

situation de communication écrite, il peut s'avérer opportun de choisir l'enseignant comme récepteur du message plutôt qu'un élève pour que l'élève émetteur n'attribue pas l'échec de son action à l'élève récepteur, ce qui pourrait effectivement être le cas. Salin (2007b) considère par ailleurs que la recherche de l'autonomie complète de l'élève en situation adidactique n'est pas souhaitable en adaptation scolaire. Selon elle, si les élèves comprennent l'enjeu du problème mais qu'ils ne peuvent mettre en œuvre une stratégie pour le solutionner, l'enseignant doit montrer ce qu'il faut faire et inviter les élèves à mettre à l'épreuve la solution exposée. Autrement dit, la dévolution doit porter principalement sur la prise de conscience de l'enjeu du problème mathématique. Or, si aucune action sur le milieu ne peut être engagée, un enseignement de type ostensif peut être envisagé, mais dans un rapport effectif avec le milieu. Enfin, pour favoriser la transformation des connaissances en savoirs et ainsi permettre aux élèves de reconnaître les différentes situations dans lesquelles une connaissance est utile, Salin suggère de recourir à des « situations intermédiaires ». Ces situations consistent à proposer des exercices aux élèves et à les accompagner dans la décontextualisation des connaissances. La proposition de Salin est donc d'organiser, d'une part, des situations adidactiques pour donner du sens aux apprentissages et, d'autre part, des exercices pour identifier ce qui, dans la situation adidactique, relève du savoir mathématique.

- Giroux (2013)

Giroux (2013) s'appuie sur la TSD, sur la distinction savoir/connaissance de Conne (1992) ainsi que sur les travaux didactiques réalisés en adaptation scolaire, pour penser l'intervention en mathématiques auprès d'élèves en difficulté scolaire. Elle présente deux repères didactiques généraux auxquels se rattachent des balises visant à les opérationnaliser.

Le premier repère consiste en la nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances. Ce repère s'appuie sur la distinction proposée par Conne (1992) entre connaissance et savoir. Selon Conne, le savoir est une connaissance reconnue utile. Autrement dit, lorsqu'un élève reconnaît l'utilité d'une connaissance, il est en mesure d'identifier les problèmes pour lesquels cette connaissance est pertinente et il exerce ainsi un contrôle sur la situation. Dans cette perspective, un élève est en difficulté lorsqu'il n'est pas en mesure d'établir les relations

entre ses connaissances et les situations pour lesquelles ces connaissances sont utiles. Trois balises d'intervention sont proposées pour permettre aux élèves d'élargir le caractère d'utilité des connaissances et les faire fonctionner en tant que savoir. La première, qui se réfère à la dévolution de la TSD, se définit comme le *soutien à la mise en œuvre d'une stratégie finalisée dans le cadre d'une situation à dimension adidactique*. Giroux propose, lorsque des élèves ont du mal à mettre en place une stratégie de solution ou à faire la relation entre leur action et la réponse du milieu, d'accompagner l'élève pour qu'il puisse appliquer une stratégie et en voir les résultats. Il serait effectivement plus important de permettre aux élèves de vivre cette expérience que de les installer dans un état d'autonomie complète. Sa proposition vise à instaurer une interaction entre l'élève et le milieu; elle diffère ainsi de celle de Salin (2007b) qui mise sur l'enseignement ostensif. La deuxième balise consiste à *assurer une variété de situations mathématiques et de leurs supports pour favoriser une institutionnalisation*. Autrement dit, pour permettre aux élèves de décontextualiser leurs connaissances, il convient, d'une part, de varier les situations mathématiques qui marquent chacune une forme d'utilité différente de la connaissance et, d'autre part, de varier les supports (environnement papier/crayon, environnement informatique, jeux, calculettes, etc.) et les contextes. La variété permettrait d'éviter la suradaptation aux contraintes d'une tâche et, donc, la centration sur une stratégie locale. Pour favoriser le maillage entre les situations, il serait également important, toujours selon Giroux (2013), de réfléchir à leur organisation temporelle pour stimuler une relance de l'enjeu mathématique d'une situation à l'autre. La troisième balise est la *nécessité de favoriser le repère et l'abstraction de régularités mathématiques qui elles-mêmes favorisent la transformation de connaissances en savoirs*. Les élèves en difficulté seraient particulièrement sensibles aux régularités mathématiques, lesquelles permettent d'anticiper la réponse du milieu et, donc, d'exercer un contrôle sur la situation. Ce contrôle est essentiel pour l'apprentissage, car il suppose de considérer qu'il est possible de traiter le réel à partir d'une structure, d'un modèle mathématique. Abstraire des régularités semble ainsi une entrée intéressante pour favoriser la mise en relation entre les situations d'action et l'institutionnalisation.

Le deuxième repère consiste en la *nécessité de maintenir un enjeu mathématique et donc l'interaction élève/milieu*. Plusieurs études attribuent des caractéristiques particulières aux élèves en difficulté, notamment leur manque d'investissement (Parmar et Cawley, 1991;

Sensevy, 1998; Blouin et Lemoyne, 2002). Giroux (2013) propose un changement de perspective pour aborder les difficultés d'apprentissage en mettant en relation ces résultats avec les types de contrats spécifiques à l'adaptation scolaire. Selon elle, pour contrer les phénomènes didactiques qui découlent de ces contrats, il faut mettre en œuvre des moyens didactiques qui sollicitent l'engagement mathématique et cognitif des élèves dits en difficulté. Pour ce faire, trois balises d'interventions rattachées à ce deuxième repère, sont présentées. La première consiste en la *nécessité de considérer les objets de savoir investis par les élèves*. Bien qu'une situation cible un objet de savoir, cet objet est généralement lié à d'autres objets de savoir qui peuvent être saisis et investis par les élèves. Ainsi, les élèves peuvent adopter des stratégies qui reposent sur des connaissances mathématiques qui ne correspondent pas à celles que l'enseignant souhaitait développer. Giroux invite, dans ce cas, à faire preuve d'une certaine souplesse afin qu'il y ait reconnaissance à l'endroit de l'élève de son investissement mathématique. La chercheuse propose donc de profiter des opportunités qu'apporte une situation pour travailler des objets de savoir non prévus. La deuxième balise invite à *favoriser des situations dont les consignes, le matériel ou le contexte en tant qu'éléments du milieu, n'écrasent pas l'enjeu de savoir*. Selon cette balise, le milieu didactique ne doit pas être trop chargé, et ce, pour que le travail des élèves porte sur l'enjeu mathématique, et non sur l'appropriation du contexte ou sur la maîtrise de règles pour accéder au jeu. Enfin, la troisième balise suggère d'*organiser le milieu didactique de manière à favoriser une rétroaction rapide sur la justesse des connaissances engagées*. Giroux constate la difficulté qu'éprouvent certains élèves à interpréter la réponse du milieu en tant qu'information sur la justesse des connaissances investies. Ainsi, malgré la rétroaction reçue, des élèves persistent dans l'utilisation d'une stratégie inefficace. Pour relancer les élèves et les amener à anticiper la réponse du milieu, il est donc proposé de favoriser des situations dans lesquelles la rétroaction du milieu est rapide. Les élèves peuvent alors plus facilement se souvenir de ce qui a motivé leurs choix, ce qui facilite l'interprétation de la réponse du milieu.

Enfin, certains élèves réussissent plus facilement en mathématiques que d'autres, et ceux qui ne performant pas selon les normes attendues sont dits « en difficulté d'apprentissage ». Les sciences cognitives s'intéressent aux causes cognitives des difficultés, cherchant ainsi à

identifier ce qui, dans les processus cognitifs impliqués, est déficitaire. Une telle perspective ne prend en compte ni la nature du savoir à apprendre ni les conditions sous lesquelles l'apprentissage d'un savoir se réalise. Pourtant, nombreuses sont les études qui répertorient les obstacles associés à l'apprentissage d'un objet de savoir donné, car ce sont généralement les mêmes difficultés qui sont rencontrées par les élèves, ce qui joue en faveur d'une « hypothèse didactique » des difficultés. En effet, la thèse didactique ne s'intéresse pas aux caractéristiques personnelles des élèves, mais plutôt à la spécificité du savoir en jeu et au fonctionnement des institutions qui en assurent l'enseignement (par exemple, le type de contrat didactique).

CHAPITRE III

PROBLÉMATISATION ET OBJECTIFS DE RECHERCHE

Dans ce chapitre, nous traitons d'abord de la tension entre les cadres de référence cognitiviste et didactique dans le domaine de l'orthopédagogie. Nous identifions ensuite les apports et les limites des thèses de la neuropsychologie, de la psychologie cognitive et de la didactique concernant l'intervention en mathématiques. Les objectifs de la recherche sont finalement présentés.

3.1. Rôle de l'orthopédagogue : tension entre les cadres de référence cognitiviste et didactique

Il y a un certain flou actuellement sur la fonction de l'orthopédagogue, et cela se traduit notamment par la difficulté, pour les commissions scolaires, à déterminer l'appartenance syndicale de ce professionnel. Doit-on intégrer l'orthopédagogue dans le syndicat des enseignants ou dans celui des professionnels non enseignants ? En effet, tout comme les professionnels non enseignants, les orthopédaugues n'ont pas de classe à leur charge. Cependant, leur mandat est de nature pédagogique : ils sont appelés à être une aide à l'enseignement des contenus disciplinaires de base, le français et les mathématiques, auprès des élèves à risque ou en difficulté. C'est d'ailleurs notamment faute de distinctions entre les contenus de formation dans les programmes d'orthopédagogie et d'enseignement en adaptation scolaire que, depuis 2002, tous les programmes d'enseignement en adaptation scolaire portent le même titre.

Malgré l'importance qu'a prise la didactique disciplinaire dans la formation des orthopédaugues (voir chapitre I), l'acte orthopédagogique, tel que présenté par l'ADOQ, s'inscrit dans un cadre « cognitiviste ». Cela tient, en grande partie, à l'intégration des théories cognitives dans le champ de la lecture et de l'écriture, et plus particulièrement dans le domaine des troubles spécifiques du langage. La priorité des services orthopédagogiques a

toujours été le soutien à l'apprentissage de la lecture auprès des élèves du primaire en accord avec la pression sociale pour la réussite des élèves en lecture. La « culture » orthopédagogique relève donc davantage des débats et enjeux propres à ce domaine d'apprentissage, comme en témoignent les références du mémoire de l'ADOQ. En effet, ces références sont issues du champ de la didactique (ou orthodidactie) du français et aucune ne relève du champ de la didactique des mathématiques.

Actuellement, les pratiques orthopédagogiques sur la lecture s'appuient principalement sur des modèles cognitivistes. Le modèle de Giasson (1990), par exemple, repose sur cinq processus que l'orthopédagogue évalue et sur lesquels il peut intervenir. Ce modèle rend opérationnelle la définition de l'acte orthopédagogique de l'ADOQ. Par défaut, les orthopédagogues sont à la recherche d'un modèle cognitiviste en mathématiques qui déclinerait un certain nombre de processus mathématiques généraux. Bien qu'il existe des modèles cognitivistes sur le nombre (McCloskey, Caramazza et Basili, 1985), il n'existe pas, à notre connaissance, de modèles cognitivistes éprouvés pour l'évaluation et l'intervention des processus généraux en mathématiques. Cela tient en grande partie à la spécificité du domaine mathématique. Enseigner les mathématiques, c'est viser à ce que les élèves s'approprient des savoirs déjà constitués qui ont leurs caractéristiques respectives. Les recherches dans le domaine des difficultés d'apprentissage en mathématiques débordent largement le paradigme cognitiviste.

Une tension entre une perspective professionnelle, associée à un cadre de référence cognitiviste, et une perspective pédagogique, associée à un cadre de référence didactique, est bien présente et se manifeste sous différentes formes. Horth (2000), dans l'historique québécois qu'il a tracé de l'adaptation scolaire, rappelle que le passage d'un concept de ségrégation à l'endroit des personnes qui présentent des différences à celui d'intégration, s'est accompagné au cours des années 1970 de la lente disparition du modèle psychomédical à deux volets, diagnostique et rééducatif, et de l'approche clinique en éducation (centrée sur l'individu), au profit d'une approche pédagogique axée sur les modes de transmission des contenus d'enseignement. Actuellement, on semble assister, sous une forme nouvelle, à un retour de l'approche médicale ou biologique. Il est vrai que l'essor fulgurant des sciences cognitives au cours des 20 dernières années a généré de nouvelles connaissances sur

l'apprentissage à travers, notamment, les études sur les dysfonctionnements cognitifs censément associés à certains troubles d'apprentissage. Alors que certains chercheurs, dont Bruer (1997), dénoncent le fossé important entre la neuroscience (qui étudie les neurones, les synapses) et l'éducation, d'autres chercheurs, dont Masson²⁴ (2007), considèrent que le développement des connaissances en neurosciences permet de réduire l'écart entre ces deux domaines et rend par conséquent prometteuses ces recherches pour l'éducation. Mais une perspective centrée sur les processus cognitifs est-elle suffisante pour enseigner les mathématiques à ceux qui rencontrent des difficultés ?

3.2 Intervention en mathématiques : ce qu'offrent les thèses de la neuropsychologie, de la psychologie cognitive et de la didactique

Comme nous l'avons vu au chapitre II, l'approche de la neuropsychologie conduit à s'intéresser au trouble de la dyscalculie. Cependant, selon l'*expertise collective* (2007), ce trouble est beaucoup moins connu que celui de la dyslexie, ce qui s'explique par le faible nombre d'études sur la dyscalculie ainsi que par l'objet même d'étude. En effet, le traitement numérique engage un nombre considérable de fonctions cognitives, en raison de la diversité des activités qui y sont liées : quantification de collections, résolution de problèmes à énoncés verbaux (impliquant ou non plusieurs étapes de résolution), algorithmes pour résoudre des opérations, traitement de divers codes (oral, écrit, arabe), compréhension de la notation en base dix, etc. Il n'est donc pas étonnant que les chercheurs aient du mal à identifier une fonction précise à l'origine de ces diverses activités. La difficulté à identifier une telle fonction peut d'ailleurs conduire à remettre en question son existence même.

Un intérêt important est porté dans les milieux scolaires au repérage d'élèves présentant un trouble d'apprentissage. Vannetzel, Eynard et Meljac (2009) font l'hypothèse que les aides apportées en cas de diagnostic positif contribuent à l'engouement pour les différentes catégories de troubles, notamment celui de la dyscalculie. Selon Vigier (2009), cette médicalisation de la question des difficultés d'apprentissage en mathématiques conduirait

²⁴ Notons que Masson s'intéresse plus particulièrement à l'apport des neurosciences pour l'enseignement des sciences.

cependant de nombreux enseignants à considérer les élèves dyscalculiques comme génétiquement inaptes aux apprentissages numériques et, donc, à renoncer à toute innovation pédagogique auprès d'eux. Il reste effectivement à déterminer en quoi l'identification d'une dyscalculie peut être intéressante pour l'enseignement puisqu'à ce jour, les recherches (Kucian et coll., 2006; Rousselle et Noël, 2007; Vannetzel, Eynard et Meljac, 2009) montrent plutôt que les interventions qui sont bonnes pour les élèves dyscalculiques le sont aussi pour les élèves non dyscalculiques²⁵.

La thèse de la psychologie cognitive propose quant à elle des stratégies générales d'apprentissage pour aider les élèves en difficulté, ce que Roiné (2009) appelle *l'enseignement métacognitif*. En accord avec le programme de formation, les enseignants, et plus particulièrement encore les orthopédagogues, s'intéressent aux processus qui permettent l'acquisition des différents contenus. Ainsi, l'enseignement métacognitif suggère l'existence de procédures et de méthodes qui existent indépendamment du contenu. Pour aider les élèves (et plus particulièrement les élèves en difficulté) à développer des connaissances, il conviendrait d'enseigner des stratégies qui fournissent « un ensemble d'outils adaptables, transférables, susceptibles de (leur) permettre d'apprendre à apprendre tout en résolvant les problèmes soulevés par la vie scolaire d'abord, quotidienne ensuite » (Fayol et Monteil, 1994, p. 92). Alors que certains élèves utiliseraient spontanément des stratégies, d'autres auraient besoin qu'elles leur soient enseignées. Divers auteurs présentent cependant les limites d'un tel enseignement : les stratégies enseignées ne seraient généralement pas maintenues (Fayol et Monteil, 1994), la présentation d'un dispositif supplémentaire (les stratégies à adopter) présenterait un coût cognitif qui pourrait amener certains élèves à faire moins bien avec la stratégie que sans elle (Fayol et Monteil, 1994; Roiné, 2009), l'enseignement d'heuristique pourrait conduire à une déresponsabilisation du contrôle du travail intellectuel de l'élève, c'est-à-dire qu'au lieu de s'engager dans la recherche d'une solution au problème, il chercherait à respecter la méthode qui lui a été enseignée (Brousseau, 1998). De plus, souvent, les stratégies apparaîtraient spontanément lorsque les sujets sont confrontés à des tâches pour lesquelles ils disposent des connaissances préalables, et elles

²⁵ Helayel et Causse-Mergui (2011), qui ont écrit un livre portant sur l'intervention auprès d'élèves dyscalculiques, précisent d'ailleurs dans le titre : *100 idées pour aider les élèves « dyscalculiques » et tous ceux pour qui les maths sont une souffrance* (les caractères gras sont de nous).

seraient rarement mobilisées en l'absence de connaissances préalables (Fayol et Monteil, 1994; Matheron et Noirfalise, 2002). Par exemple, concernant la stratégie « souligner les données importantes dans le problème », les élèves qui ont déjà compris le problème seraient généralement en mesure de le faire, alors que ceux qui ne l'ont pas compris auraient du mal à identifier ce qu'il faut souligner.

Ainsi, une approche qui s'appuie exclusivement sur les thèses cognitives nous paraît insuffisante pour penser l'intervention en mathématiques auprès d'élèves en difficulté puisque les sciences cognitives ne s'intéressent ni à l'analyse épistémologique des savoirs ni aux interactions entre l'enseignement et l'apprentissage.

L'étude de cas réalisée par Mary (2003) montre bien les limites d'une interprétation des difficultés centrée sur les caractéristiques de l'élève. Pour trouver la solution à un problème additif, une intervenante propose d'abord à une élève en difficulté de faire un dessin. L'inefficacité de cette méthode (l'élève commet des erreurs dans le dénombrement de ses dessins) la conduit à rechercher une autre stratégie (notamment encrer les nombres dans le problème). Comme l'élève ne réussit toujours pas à trouver l'opération à effectuer pour résoudre le problème, l'intervenante insiste sur le mot « et » pour lui montrer qu'il faut faire une addition. Par conséquent, lors des problèmes suivants, au lieu de rechercher à établir des relations entre les données du problème, l'élève recherche dans les énoncés les mots qu'elle peut directement transformer en opération. L'intervenante enseigne finalement une démarche de résolution de problèmes en trois étapes. Enfin, les difficultés dans l'intervention seraient notamment causées par le fait que l'intervention ne repose pas sur une analyse des tâches à réaliser. Il ne suffit pas de bien lire le problème pour établir correctement les relations entre les données. Selon Mary, au lieu de rechercher des méthodes générales permettant à l'élève de trouver la solution à divers problèmes, l'intervenante aurait eu intérêt, dans ce cas, à développer le sens des opérations d'addition et de soustraction à partir de tâches prévues à cet effet.

Enfin, l'enseignement métacognitif ne prend pas en compte les conditions didactiques permettant la construction des savoirs par l'élève. Divers chercheurs (Giroux, 2007; Roiné, 2009; Mary, 2003) montrent effectivement que les adaptations des dispositifs didactiques

créés pour enseigner, adaptations centrées sur les « nécessités individuelles » des élèves, ne priorisent pas la préservation des caractéristiques fondamentales des savoirs à enseigner, ce qui conduit à des pertes de signification. Un des éléments fondamentaux de la didactique est l'étude des situations mathématiques proposées aux élèves. Partant de l'idée que toute pratique sociale peut être acquise sans qu'elle n'ait été explicitement enseignée, Brousseau étudie les conditions nécessaires pour recréer une activité mathématique dans les classes. Dans cette perspective, l'apprentissage d'une règle et de son application se nourrissent simultanément. Ainsi, contrairement à ce que proposent certains cognitivistes, on n'apprend pas à suivre une règle, mais on apprend à agir conformément à la règle (Sarrazy, 2005). Par exemple, les élèves ne pourraient comprendre notre système positionnel exclusivement à partir de l'explication de ses règles. C'est à partir de tâches variées illustrant le fonctionnement de la règle qu'ils apprennent à agir en fonction des règles de notre système de numération et qu'ils développent leurs connaissances. Le choix des situations est donc déterminant pour favoriser l'apprentissage d'un savoir mathématique. Pour favoriser l'apprentissage des mathématiques, il serait donc important de présenter les règles mathématiques en relation avec leurs différents usages (Roiné, 2009), de varier les situations présentées de façon à favoriser différents accès qui relèvent d'une forme différente d'utilité de la connaissance (Giroux et Ste-Marie, 2007).

L'approche systémique qu'adopte la thèse didactique permet de prendre en compte, de plus, le contexte dans lequel se déroule l'enseignement. Ainsi, sont considérées les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les intervenants et l'influence que ces dernières exercent sur leur pratique. Par cette approche, les travaux en didactique des mathématiques en adaptation scolaire ont pu repérer un certain nombre de phénomènes didactiques qui retardent la progression des apprentissages. La perspective didactique offre des cadres théorique et méthodologique qui, en retour, peuvent contribuer à faire échec aux types de contrat didactique qui ralentissent l'avancée dans le savoir.

3.3 Objectifs de recherche

Peu de recherches ont été menées en mathématiques dans le contexte de l'orthopédagogie, ce qui explique probablement en partie la « psychologisation » de l'intervention orthopédagogique. Nous souhaitons explorer ce que peut offrir un appui théorique de nature didactique pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques. L'objectif général de notre recherche consiste plus précisément à **étudier les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction**. Nous nous intéressons exclusivement à l'intervention en dénombrement flottant, qui constitue la majeure partie des interventions orthopédagogiques. Nous ne cherchons pas à adapter les interventions aux caractéristiques des élèves en difficulté, mais plutôt à adapter les interventions à la spécificité du contexte orthopédagogique. Ce contexte présente certainement des avantages : il permet plus facilement, par exemple, de proposer des situations qui sont adaptées aux connaissances des élèves. Cependant, il présente également des défis de taille. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette forme d'aide peut provoquer un contrat de dépendance de l'élève à l'égard de l'orthopédagogue et limite l'accès à la mémoire didactique de la classe dans les échanges entre l'orthopédagogue et l'élève.

Le contenu disciplinaire choisi est la fraction, qui consiste en l'une des représentations du nombre rationnel. Une bonne compréhension des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres est nécessaire pour acquérir les savoirs prévus au programme de mathématiques du secondaire. De plus, la fraction représente un enjeu très sensible pour le passage du primaire au secondaire, car il y a une rupture entre la fraction traitée au primaire et celle traitée au secondaire. Au primaire, la notion de fraction est travaillée en référence à différents contextes et les opérations sur les fractions constituent une partie infime des activités. En revanche, au secondaire, très peu de tâches portent explicitement sur la fraction (la fraction étant généralement traitée à travers d'autres contenus mathématiques) et le travail sur les fractions porte presque exclusivement sur les opérations sur les fractions. La fraction n'est que très rarement travaillée à partir de contextes extramathématiques²⁶. Notons de plus que les

²⁶ Un contexte est considéré comme extramathématique lorsqu'on se réfère à des objets du monde réel et il est considéré, au contraire, comme intramathématique lorsqu'on se réfère uniquement à des objets, des symboles ou des structures mathématiques et qu'aucun thème extérieur au monde des mathématiques n'est évoqué (PISA, 2009).

demandes de soutien orthopédagogique pour des élèves éprouvant des difficultés en mathématiques sont plus fréquentes au dernier cycle du primaire, en raison justement des obstacles que pose l'appropriation d'un nouvel ensemble de nombres.

Pour atteindre notre objectif de recherche, nous identifions trois objectifs spécifiques :

- 1) identifier, dans les écrits scientifiques, des conditions didactiques qui apparaissent favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction;
- 2) élaborer une séquence d'enseignement sur la fraction²⁷ adaptée au contexte orthopédagogique en s'appuyant sur les conditions didactiques retenues;
- 3) mettre à l'épreuve les conditions didactiques choisies et identifier, s'il y a lieu, de nouvelles conditions favorables à l'intervention orthopédagogique sur la fraction.

Nous appuyant sur les travaux portant sur la mise à l'épreuve de la TSD en contexte d'adaptation scolaire et sur ceux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la fraction, nous identifions quelques conditions didactiques qui apparaissent favorables à l'intervention en contexte orthopédagogique. Sur la base des conditions choisies, une séquence d'enseignement est ensuite élaborée et expérimentée afin de mettre à l'épreuve ces conditions. L'analyse du contenu des échanges didactiques ouvre sur l'analyse des conditions didactiques, permettant ainsi d'observer, d'une part, si les conditions retenues dans les écrits scientifiques résistent au contexte de l'orthopédagogie et, d'autre part, si des conditions didactiques non prévues émergent de l'analyse des données.

²⁷ Pour élaborer la séquence, il a été nécessaire de préciser le contenu disciplinaire sur lequel porterait l'enseignement. Nous avons ciblé l'équivalence des fractions, qui est au cœur de l'apprentissage des fractions.

CHAPITRE IV

CADRE THÉORIQUE SUR LA FRACTION

Ce chapitre présente une analyse d'ordres à la fois épistémologique, ontogénique et didactique (Artigue, 1988) de la fraction. La fraction étant l'une des représentations du nombre rationnel, une première section est consacrée aux propriétés des nombres rationnels. Une seconde section porte sur les différentes interprétations de la fraction selon Kieren (1976, 1980, 1989), à la source de plusieurs études didactiques sur la notion de fraction. Une attention particulière est accordée aux relations que les différentes interprétations entretiennent avec l'équivalence des fractions, car nous avons choisi, dans la cadre de notre recherche, de nous intéresser plus spécifiquement à la notion d'équivalence. La section suivante est consacrée à l'appropriation de la notion de fraction. La présentation de deux modèles d'enseignement, celui de Streefland (1991) et celui de Brousseau (1987), complète ce chapitre.

4.1 Les nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre réel qui peut s'exprimer par le quotient de deux entiers relatifs dont le second est non nul. Les nombres rationnels peuvent être représentés par différentes formes d'écriture : des fractions (ex. : $\frac{5}{4}$), des couples ordonnés (ex. : $5 : 4$), des nombres fractionnaires (ex. : $1 \frac{1}{4}$), des nombres décimaux (ex. : 1,25) (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1964), et finalement des expansions décimales infinies (ex. : 0,3333...).

La représentation d'un nombre avec un développement décimal apparaît comme une extension naturelle du système de numération des nombres entiers. Notons qu'un nombre écrit sous la forme décimale est rationnel si et seulement si le développement décimal est fini ou périodique. Si le développement décimal est infini et non périodique, il s'agit d'un nombre

réel irrationnel et il ne peut, dans ce cas, s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs.

L'écriture fractionnaire rompt davantage avec l'écriture des nombres entiers que l'écriture décimale, car, contrairement à cette dernière, l'écriture fractionnaire ne repose pas exclusivement sur les groupements en base 10 et sur la valeur positionnelle. Au fait, la fraction consiste, selon Baruk (1992), à écrire le nombre rationnel sous la forme a/b , où a et b sont des entiers relatifs et où b est différent de zéro (les différentes définitions trouvées dans la littérature diffèrent peu de celle-ci).

Contrairement aux nombres entiers et à l'écriture décimale, il y a une infinité de fractions qui désignent le même nombre (ex. : $1/4 = 4/16 = 25/100 = \text{etc.}$). La relation d'équivalence entre les fractions est constitutive de la définition d'un nombre rationnel, qui consiste en un ensemble de couples ordonnés équivalents $(a : a')$ de nombres entiers, avec $a' \neq 0$, dont l'équivalence est déterminée par la relation R suivante : $(a : a') R (b : b')$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$. Le couple $(a : a')$ peut être symbolisé par l'expression a/a' et la relation entre deux éléments du même ensemble par l'expression $a/a' = b/b'$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$.

L'ensemble des nombres entiers (\mathbb{Z}) et celui des rationnels (\mathbb{Q}) ne partagent pas toutes les mêmes propriétés. Dans \mathbb{Q} , il y a une infinité de nombres entre deux nombres, ce qui n'est pas le cas dans \mathbb{Z} . Une autre propriété propre aux nombres rationnels est le fait que chaque rationnel, sauf zéro, a un inverse multiplicatif : pour chaque nombre rationnel a différent de zéro, il existe un nombre rationnel b tel que $a \times b = 1$. Dans le contexte des nombres entiers, tout nombre a a un opposé (ou inverse additif), ce qui permet de garantir l'existence de solution à toute équation du type $x + b = c$ (b et c entiers). Par contre, les équations du type $ax = b$ (a et b entiers, a non nul) n'ont pas toujours de solution dans \mathbb{Z} (par exemple, il n'existe pas un entier qui est solution de $2x = 3$). L'invention des nombres rationnels vient résoudre cette difficulté. Effectivement, comme tout rationnel a non nul a un inverse multiplicatif, toutes les équations $ax = b$ ont ainsi une solution dans \mathbb{Q} , en l'occurrence le rationnel b/a .

4.2 Les cinq interprétations de la fraction

Kieren (1976, 1980, 1989) relève cinq interprétations de la notion de fraction : 1) la fraction partie/tout; 2) la fraction mesure; 3) la fraction rapport; 4) la fraction quotient; 5) la fraction opérateur. Une construction de la fraction reposerait sur une intégration progressive des différentes interprétations (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983; Behr, Harel, Post et Silver, 1993). Si l'interprétation partie/tout est la première à être construite par les élèves, les autres interprétations viennent se greffer aux précédentes, enrichissant ainsi le concept de nombre rationnel.

Dans les sections subséquentes, chacune des interprétations est définie, et nous identifions le sens que chacune d'elles permet de donner à l'équivalence des fractions. De plus, nous présentons, pour chaque interprétation, des situations typiques qui la caractérisent en lien avec les stratégies et/ou les difficultés qui leur sont associées. Notons toutefois que les interprétations ne sont pas étanches et que les solutions apportées à un même problème peuvent renvoyer à l'une ou à l'autre des interprétations, parfois même à la coordination de celles-ci. Les exemples ont été choisis sur la base d'études qui différencient les interprétations déclinées dans le modèle de Kieren.

4.2.1 Fraction partie/tout

L'interprétation de la fraction partie/tout est relative à la quantification de la relation entre un nombre désigné de parties et un tout. Ainsi, dans la fraction notée a/b , a correspond à un nombre désigné de parties d'un tout partagé en b parties égales. La fraction partie/tout repose sur la compréhension des schèmes de partition puisqu'un tout est divisé en parties égales et que l'ensemble des parties correspond au tout. Ainsi, pour un même tout, plus il y a de parties, plus les parties sont petites et vice versa.

L'interprétation partie/tout ne permet pas de donner du sens à une fraction impropre (c'est-à-dire une fraction supérieure à « 1 »). Comme le numérateur représente une partie et le dénominateur le tout, le numérateur est donc nécessairement plus petit ou égal au dénominateur. De plus, cette interprétation permet peu de s'approprier la fraction en tant que

structure multiplicative. La fraction y est effectivement traitée comme l'expression d'une grandeur absolue alors qu'elle peut également exprimer un rapport. Toutefois, l'acquisition de la fraction en tant que partie d'un tout serait, selon divers chercheurs (notamment Behr et coll., 1983), fondamentale pour développer les autres interprétations.

Notons par ailleurs que l'on distingue dans l'interprétation partie/tout deux types de tout : 1) le tout continu, qui est représenté par un seul élément; 2) le tout discret (ou le tout collection), qui correspond à un ensemble fini d'éléments.

Des fractions sont équivalentes, selon l'interprétation partie/tout, lorsqu'elles entretiennent la même relation avec leur tout, continu ou discret, de référence. Ainsi $2/5$ et $8/20$ expriment une même relation avec leur tout respectif de référence du fait qu'ils entrent exactement $5/2$ fois dans leur tout respectif.

En enseignement, l'équivalence de fractions s'explique bien souvent à partir d'un même tout de référence par la superposition imagée des fractions d'un tout. Par exemple, pour comparer $1/4$ et $2/8$, deux cercles identiques peuvent être présentés. Dans le premier, on hachure 1 partie sur 4²⁸ et dans le second, 2 parties sur 8. L'équivalence des fractions s'explique alors par le fait que la même surface a été hachurée dans chaque cercle. Elle est ainsi associée à l'égalité des quantités auxquelles les fractions réfèrent.

- Situations typiques et stratégies et/ou difficultés associées

L'interprétation partie/tout est sollicitée pour identifier a/b d'un tout continu ou d'une collection d'objets (tout discret). Les stratégies mises en œuvre diffèrent selon, notamment, le type de tout.

Pour identifier la fraction a/b qui correspond à une partie d'un tout continu, il faut procéder à une partition à la fois égale et exhaustive d'un tout en b parties égales et identifier le nombre de parties qui correspond à a . La fraction $2/5$ peut par exemple représenter les $2/5$ d'un gâteau : il faut alors fractionner le gâteau en 5 parts égales (comme l'indique le dénominateur) et prélever 2 de ces parts (comme l'indique le numérateur). Si le gâteau n'est

²⁸ Nous écrivons habituellement en lettres les nombres entiers inférieurs à 10. Cependant, une écriture en chiffres est privilégiée lorsqu'il s'agit de nombres impliqués dans une activité mathématique, visant ainsi à alléger la lecture.

pas divisé en 5 parts égales, pour vérifier si la partie prélevée correspond aux $2/5$ du gâteau, cela exige d'établir une relation entre la partie prélevée et le tout (ex. : est-ce que la partie prélevée entre 2 fois et demie dans le tout ?). La difficulté avec ce type de partition est de coordonner l'épuisement du tout et le partage en parts égales. Le niveau de difficulté varie en fonction de la forme du tout (ex. : il est plus facile de partager un carré en 4 parties égales que de partager un triangle équilatéral en 4 parties égales) et des nombres impliqués dans a/b (il est plus facile de prélever $1/2$ d'un carré que d'en prélever les $5/7$). Lorsque le tout est divisé en n parts égales²⁹, le niveau de difficulté varie également en fonction de la relation entre b et n (ex. : il est plus facile de prélever $2/3$ d'un tout partagé en 3 parts égales que de prélever $2/3$ d'un tout partagé en 12 parts égales). Il arrive également que les parts présentées dans le tout ne soient pas égales, ce qui augmente le niveau de difficulté.

Pour identifier la fraction a/b d'un tout composé de n objets, il est possible de faire appel à d'autres interprétations que l'interprétation partie/tout. Des stratégies variées de partition peuvent être déployées en fonction du rapport entre b et n . En effet, identifier les $2/5$ de 5, 10 ou 11 objets ne sollicite pas les mêmes stratégies de partition. Nous appuyant sur Blouin (1993), Charles et Nason (2000) et Giroux (2011), nous identifions cinq grandes stratégies.

1) *Stratégie de partition sur des tous continus*

Pour identifier a/b d'une collection de n objets, considérer chaque objet comme un tout continu et prélever a/b de chaque objet.

2) *Stratégie du double comptage*

Pour identifier a/b d'une collection de n objets, prendre a objets pour chaque b objets, ce qui conduit à une réussite si $n = b$ ou si n est multiple de b ³⁰.

Trois niveaux

A- Prélever a objets sur b objets (permet une réussite uniquement si $n = b$).

B- Prendre a objets chaque fois qu'il y a b objets, sans anticipation sur le nombre de groupements.

²⁹ En présentant un tout continu divisé en parts égales, le traitement des parts peut se confondre avec le traitement des objets d'un tout discret.

³⁰ Si n n'est pas multiple de b , cette stratégie peut être jumelée à la stratégie 1. Par exemple, pour identifier $2/5$ de 11 objets, prendre 2 objets chaque fois qu'il y en a 5 et prendre $2/5$ de l'objet restant.

- C- Effectuer le calcul $n \div b \times a$ en l'associant aux actions posées dans la stratégie du double comptage (niveau B). Ainsi, $n \div b$ permet d'obtenir le nombre de groupements de b objets (division sens regroupement) et la multiplication de ce résultat par a , de prélever a objets par groupement.

3) *Stratégie de partition sens-partage*

Pour identifier a/b d'une collection de n objets, partager la collection en b groupements égaux et prélever a de ces groupements, ce qui conduit à une réussite si $n = b$ ou si n est multiple de b ³¹.

Deux niveaux

- A- Partager la collection de n objets en b groupements égaux et prélever a de ces groupements.
- B- Effectuer le calcul $n \div b \times a$ en l'associant aux actions posées dans la stratégie de partition sens-partage (niveau A). Ainsi, $n \div b$ permet d'obtenir le nombre d'objets par groupement lorsqu'on distribue n en b groupements égaux (division sens partage) et la multiplication de ce résultat par a , de prélever a de ces groupements.

4) *Stratégie numérique selon l'interprétation opérateur*

Pour identifier a/b d'une collection de n objets, interpréter a/b comme un opérateur fractionnaire et faire $a/b \times n$ ou décomposer a/b en deux opérateurs entiers et faire $n \times a \div b$ ou $n \div b \times a$.

5) *Stratégie numérique selon l'interprétation rapport*

Pour identifier a/b d'une collection de n objets, établir deux rapports équivalents : a pour b est équivalent à x pour n , autrement dit, $a/b = x/n$ (la valeur de x étant recherchée).

Pour favoriser la mise en relation entre la partie prélevée et le tout, au lieu de rechercher la partie à partir d'un tout, le problème peut consister à identifier le tout à partir de l'une de ses

³¹ Si n n'est pas multiple de b , cette stratégie peut être jumelée à la stratégie 1. Par exemple, pour identifier $2/5$ de 11 objets, partager la collection en 5 groupements de 2 et séparer l'objet restant en 5 pour le partager également entre les 5 groupements.

parties. Par exemple, s'appuyant sur un tout continu, un rectangle qui représente les $\frac{2}{5}$ de l'unité est dessiné et la tâche consiste à identifier l'unité de référence. La réussite à cette tâche peut faire appel à l'interprétation de la fraction en tant que mesure. En effet, une stratégie efficace consiste à retrouver la valeur associée à $\frac{1}{5}$ pour reconstruire, par réplique de cette partie, le tout.

Notons enfin que l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout est largement privilégiée dans les manuels scolaires du primaire. En effet, selon une étude conduite par Rioux (2003), qui s'appuie sur un échantillon de 115 activités provenant de cinq manuels québécois, 78 % des activités de 6^e année portant sur la fraction visent le développement de l'interprétation partie/tout³².

4.2.2 Fraction mesure

L'interprétation de la fraction en tant que mesure, toujours dans le modèle de Kieren (1989), sous-tend l'existence d'une unité de mesure de type $\frac{1}{n}$. Selon cette interprétation, la fraction $\frac{3}{4}$ correspond à l'itération de $\frac{1}{4}$, trois fois : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Le numérateur correspond ainsi au nombre de fois qu'est répliqué un intervalle de mesure $\frac{1}{n}$, et le dénominateur, à la mesure de cet intervalle. Contrairement à l'interprétation partie/tout, cette interprétation permet de traiter les fractions impropres : en procédant à l'itération de $\frac{1}{4}$, on obtient successivement $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$...

L'équivalence des fractions s'explique par l'égalité de deux mesures. Par exemple, un segment qui mesure $\frac{10}{4}$ d'une bande et un segment qui mesure $\frac{5}{2}$ de cette même bande sont de même longueur. S'appuyant sur la droite numérique, associée à l'interprétation de la fraction en tant que mesure, des fractions sont équivalentes si elles correspondent à un même point sur la droite.

³² Bien que l'étude de Rioux soit de 2003, à notre connaissance, encore aujourd'hui, la majorité des activités sur la fraction dans les manuels scolaires québécois sollicite l'interprétation partie/tout.

- Situations typiques et stratégies et/ou difficultés associées

Les contextes où cette interprétation peut être sollicitée sont variés. Cependant, comme on peut le voir dans l'étude de Charalambos et Charalambous Pitta-Pantazi (2007), la droite des réels est un contexte emblématique de cette interprétation. Il s'agit alors d'identifier une fraction qui correspond à un point donné sur une droite ou, au contraire, de repérer sur la droite le point qui correspond à une fraction donnée. Des études (Charalambos et Charalambous Pitta-Pantazi, 2007; Ni, 2001) montrent cependant que la droite numérique, très utilisée pour développer l'interprétation mesure, est un modèle très difficile à interpréter et donc à utiliser par les élèves pour s'approprier la fraction : ceci pourrait être en lien avec la difficulté à concevoir la fraction comme un nombre (et non deux nombres) et donc à établir des relations entre les fractions et les nombres naturels.

La fraction interprétée en tant que mesure peut également être sollicitée dans une activité où il faut mesurer des grandeurs à partir d'une même unité de mesure (par exemple, mesurer deux segments à partir d'une bande de papier). Le segment dans lequel l'unité de mesure entre le plus de fois est le plus long. Étant donné que l'unité de mesure n'entre pas toujours un nombre entier de fois dans les grandeurs à mesurer, il peut s'avérer nécessaire de fractionner l'unité de mesure pour mesurer le reste. Les fractions apparaissent dans ce cas comme un moyen pour exprimer le « reste »³³. Par exemple, une grandeur peut être plus grande que 2 unités de mesure, mais plus petite que 3 unités de mesure. La grandeur mesure donc 2 unités de mesure plus le reste, lequel est mesuré par un fractionnement de l'unité de mesure en parts égales. Si le reste entre 4 fois dans l'unité de mesure, cela signifie qu'il mesure $\frac{1}{4}$ de l'unité de mesure. En procédant à l'itération de cette nouvelle unité de mesure ($\frac{1}{4}$) sur toute la grandeur, on obtient $\frac{9}{4}$. Cette écriture peut être mise en relation avec l'écriture $2 \frac{1}{4}$.

³³ Si cela est possible, car l'unité et le segment ne sont pas nécessairement commensurables.

4.2.3 Fraction rapport

Le rapport est une relation entre deux grandeurs, qu'on exprime numériquement. L'interprétation rapport est utile pour la comparaison de deux grandeurs. Une proportion est définie comme l'égalité de deux rapports³⁴. Les rapports prennent un sens particulier dans le cadre des proportions, car une proportion peut s'établir entre deux rapports liant des grandeurs de natures différentes. Beaucoup de notions (proportionnalité, taux, pourcentage, probabilité...) traitées davantage au secondaire qu'au primaire reposent sur une bonne compréhension de l'interprétation rapport.

Il est à noter que la relation entre le numérateur et le dénominateur dans la fraction rapport se différencie de celle établie dans la fraction partie/tout, car la collection dénombrée par le numérateur n'est pas nécessairement incluse dans celle dénombrée par le dénominateur. Par exemple, il est possible d'indiquer que le rapport des filles et des garçons est de $1/3$, alors que l'interprétation partie/tout conduit plutôt à indiquer que les filles représentent le $1/4$ des personnes (le dénominateur représente ici le total des filles et des garçons).

La comparaison étant l'essence même de l'interprétation rapport, elle est particulièrement utile pour traiter l'équivalence des fractions. En effet, deux fractions sont jugées équivalentes si elles expriment le même rapport. Elles forment alors une proportion. On peut également affirmer, par cette interprétation, que deux fractions sont équivalentes si elles entretiennent la même relation avec leur tout de référence. Si, par exemple, les $2/3$ du groupe A sont des filles et que les $4/6$ du groupe B sont des filles, les rapports du nombre de filles au nombre total dans le groupe sont égaux dans les deux groupes. Autrement dit, la relation que les filles ($2/3$ et $4/6$) entretiennent avec leur groupe de référence est la même.

- Situations typiques et stratégies et/ou difficultés associées

Comme le soulève Ghailane (2015), pour comparer des rapports, les élèves font appel à deux types de rapport, pouvant être considérés comme deux stratégies de résolution. Pour comparer « a pour b » et « c pour d », on peut 1) comparer le rapport entre a et b et celui entre c et d ou 2) comparer le rapport entre a et c et celui entre b et d . Pour illustrer nos

³⁴ Cette acception de « proportion » n'est pas universelle. Dans certains ouvrages, proportion est synonyme de rapport, et l'égalité entre deux rapports est appelée « égalité proportionnelle ».

propos, nous reprenons l'exemple de Ghailane : à partir des rapports suivants, 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles, identifiez qui a le plus de pizzas entre les garçons et les filles. La première stratégie consiste à comparer le rapport « pizzas des garçons/ pizzas des filles » ($4 : 2$) et le rapport « nombre de garçons/ nombre de filles » ($5 : 3$). Les élèves exprimeront ce rapport, par exemple, en mentionnant que les garçons ont 2 fois plus de pizzas que les filles et que le nombre de garçons est moins que le double de celui des filles. Ils peuvent également se référer aux rapports inverses : le nombre de pizzas des filles correspond à la moitié de celui des garçons, et le nombre de filles correspond à plus de la moitié de celui des garçons. La seconde stratégie s'appuie sur la comparaison entre le rapport « pizzas des garçons/ nombre de garçons » ($4 : 5$) et le rapport « pizzas des filles/ nombre de filles » ($2 : 3$). Il s'agit dans ce cas de comparer la part que chacun obtiendra. Des stratégies sollicitant d'autres interprétations et parfois même la coordination de différentes interprétations sont alors utilisées par les élèves. Le sens quotient permet rapidement d'identifier la part de chaque garçon ($4/5$ d'une pizza) et celle de chaque fille ($2/3$ d'une pizza).

Les contextes où l'interprétation rapport est convoquée sont très variés. L'interprétation rapport peut être convoquée de manière informelle dans le jugement d'un dessin à partir du rapport entre ses parties (par exemple, le dessin d'une personne dont la longueur des membres ne serait pas dans la bonne proportion par rapport à la longueur du tronc). Elle peut également être convoquée en contexte géométrique. On peut notamment comparer la longueur d'un rectangle à sa largeur : si le rapport entre la longueur et la largeur dans deux rectangles est le même, il s'agit de deux rectangles semblables. La notion de rapport est également impliquée dans les problèmes de probabilité. Par exemple, est-ce que la probabilité d'obtenir une bille rouge est plus élevée si l'on pige une bille dans un sac qui contient 3 billes rouges et 9 billes bleues que dans un sac qui contient 7 billes rouges et 21 billes bleues ? Un élève qui n'établit pas le rapport entre le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues peut décider qu'il a plus de chance de piger une bille rouge dans le sac qui en contient le plus. Dans le même ordre d'idées, devant le problème suivant, « qui de Jean (perte de 3 billes sur 4) ou de Pierre (perte de 5 billes sur 16) aurait raison d'être le plus fâché et pourquoi ? » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 99), environ le quart des élèves de 4^e et 5^e années répondent que c'est Pierre parce qu'il a perdu plus de billes.

Pour favoriser l'interprétation rapport, Desjardins et Hétu (1974) proposent la situation suivante à des élèves de 4^e et 5^e années du primaire : « Picasso désire effectuer un mélange de bleu et de jaune de façon à obtenir de la peinture verte. Le matin, il mélange 2 petits pots de bleu à 3 petits pots de jaune. L'après-midi, il doit mélanger le même vert mais en plus grande quantité. Combien doit-il mettre de jaune et de bleu ? » (p. 85). Les conduites des élèves sont les suivantes :

- a) répétition du mélange étalon (2 petits pots de bleu et 3 petits pots de jaune);
- b) quantité égale de jaune et de bleu (ex. : 5 petits pots de bleu et 5 petits pots de jaune);
- c) différence constante entre les termes du rapport (ex. : 3 petits pots de bleu de plus $(2 + 3)$ et 3 petits pots de jaune de plus $(3 + 3)$);
- d) évaluation approximative du rapport (ex. : 7 petits pots de bleu et 9 petits pots de jaune);
- e) rapport multiplicatif (conduite adéquate);
- f) absence de coordination entre les opérations additives et multiplicatives (ex. : 3 petits pots de bleu de plus $(2 + 3)$ et 3 fois plus de petits pots de jaune (3×3)).

Selon les résultats obtenus, 74 % des élèves de 4^e année adoptent la conduite « c) » et 70 % des élèves de 5^e année adoptent la conduite « e) ». Différentes hypothèses peuvent être formulées concernant l'écart entre les stratégies adoptées par les élèves de 4^e année et celles adoptées par les élèves de 5^e année. D'abord, le plus haut taux de réussite des élèves de 5^e comparativement à ceux de 4^e peut être attribué à leur maturité cognitive. Il peut également être attribué au fait qu'en classe, les élèves de 4^e année ont plus souvent recours à l'addition qu'à la multiplication, alors que les élèves de 5^e année, au contraire, ont plus souvent recours à la multiplication qu'à l'addition. Enfin, étant donné que les élèves de 4^e année devaient effectuer les mélanges et que les élèves de 5^e année ne procédaient pas à l'expérimentation, l'hypothèse retenue par Desjardins et Hétu est la suivante : procéder concrètement à l'ajout de pots de couleurs pour créer une plus grande quantité favorise les stratégies additives.

4.2.4 Fraction quotient

L'interprétation quotient consiste à concevoir la fraction a/b comme le résultat de la division $a \div b$ dans \mathbb{Q} ³⁵. Cette interprétation rejoint ainsi la définition mathématique de la fraction en tant que division de deux entiers. Notons cependant que l'équivalence entre a/b et $a \div b$ ne va pas de soi. Une fraction peut être interprétée comme la division de deux nombres entiers puisque $a/b \times b = a$ et $a \div b \times b = a$.

Deux fractions sont jugées équivalentes si, en procédant à la division du numérateur par le dénominateur de chacune des fractions, on obtient le même quotient. Autrement dit, $a/b = c/d$ si et seulement si $a \div b = c \div d$.

L'interprétation quotient permet d'établir une relation multiplicative entre le numérateur (qui correspond au dividende) et le dénominateur (qui correspond au diviseur). Par exemple, le partage de 3 pizzas entre 9 convives ($3 \div 9 = 3/9 = 1/3$) exprime une même relation que le partage de 7 pizzas entre 21 convives ($7 \div 21 = 7/21 = 1/3$), car même s'il n'y a ni le même nombre de convives ni le même nombre de pizzas, dans les deux cas, chaque convive reçoit le $1/3$ d'une pizza³⁶.

- Situations typiques et stratégies et/ou difficultés associées

Pour développer l'interprétation quotient, les situations typiques consistent à partager équitablement un certain nombre d'objets divisibles (ex. : des tartes) entre un certain nombre de personnes dans le cas où le résultat du partage n'est pas un entier. Nous appuyant sur l'étude de Empson et ses collaborateurs (2006), nous présentons trois grandes catégories de stratégies pour résoudre ce type de problèmes. Nous relevons ensuite les difficultés à articuler l'apprentissage de la division de nombres entiers à celui de la fraction en nous appuyant sur l'étude de Middleton et ses collaborateurs (2001).

Empson et ses collaborateurs (2006), dans une étude réalisée auprès de 112 élèves âgés de 6 à 11 ans, dégagent trois grandes catégories de stratégies, lesquelles varient en fonction de l'âge,

³⁵ Le sens de la division se différencie dans \mathbb{N} et dans \mathbb{Q} puisque dans la division euclidienne dans \mathbb{N} , il y a un reste, ce qui n'est pas le cas dans la division dans \mathbb{Q} .

³⁶ Voici un exemple de coordination entre les interprétations quotient et rapport si l'on juge qu'il y a alors rapport égal et donc proportionnalité entre les deux situations.

mais également en fonction des nombres impliqués dans le problème. La première catégorie, *precoordinating strategies*, est la plus élémentaire. Il n'y a pas de coordination entre le nombre de personnes et le nombre d'objets à partager : soit il y a distribution d'une part égale à chaque personne, mais la quantité totale d'objets n'est pas épuisée, soit tous les objets sont distribués, mais de façon inégale. La deuxième catégorie, *strategies that involved coordinating parts quantities*, se divise en trois sous-catégories. La première, *progressive coordinating strategies*, est dite progressive, car il y a peu d'anticipation. La suite des opérations constitutives de cette sous-stratégie est : 1) distribution d'une part égale d'objet(s) à chaque personne ; 2) constatation du nombre d'objet(s) restant(s) ; 3) distribution à nouveau d'une part égale à chacun, et ce, jusqu'à épuisement de la collection d'objets. La deuxième, *single-item coordinating strategies*, consiste à partitionner chaque objet (ou à imaginer que chaque objet est partitionné) de manière à ce que le nombre de parties par objet soit égal au nombre de personnes ; chaque personne reçoit alors une partie de chaque objet. Enfin, la troisième sous-catégorie est *multiple-item coordinating strategies*. Il s'agit de subdiviser l'ensemble des objets de façon à remettre à chaque personne une part égale, et d'additionner ensuite les parts remises à chaque personne (ou multiplier si les parts sont toutes égales). Par exemple, pour partager également 8 tartes entre 12 personnes, partitionner 6 tartes pour faire 12 parts ($1/2$ est une part), partitionner 2 tartes pour faire 12 parts ($1/6$ est une autre part) et, pour connaître la part d'une personne, additionner $1/2$ et $1/6$. Enfin, *strategies that involved coordinating ratio quantities* constitue la troisième catégorie. Cette stratégie sollicite l'interprétation rapport et n'est possible que si le nombre d'objets à partager et le nombre de personnes ont des diviseurs communs. Elle peut se faire avec anticipation ou sans anticipation. Il est effectivement possible d'utiliser cette stratégie en procédant par tâtonnement. Par exemple, pour le partage de 3 objets entre 15 personnes, un élève s'appuie sur un dessin pour faire des groupements égaux de 4 personnes et établir qu'il y a 1 objet pour 4 personnes. Il reste ainsi 3 personnes qui sont ensuite réparties dans chacun des groupements, ce qui modifie le rapport à 1 objet pour 5 personnes. Ainsi chaque personne reçoit $1/5$ d'un objet.

Une difficulté associée à la fraction quotient concerne l'articulation entre la division de nombres entiers et la fraction. L'enseignement de la division sur les nombres entiers et l'enseignement des fractions sont bien souvent traités de façon distincte : la division est

présentée comme une opération et la fraction, en s'appuyant sur l'interprétation partie/tout. Comme le soulève Toluk (1999), avant que la fraction puisse être interprétée en tant que quotient et la division, en tant qu'expression d'un nombre rationnel, l'apprentissage de chacun de ces contenus se développe séparément. L'expérimentation d'une séquence d'enseignement s'étalant sur 5 semaines auprès d'une classe de 5^e année du primaire a permis à Middleton et ses collaborateurs (2001) de mieux comprendre les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la fraction en tant que quotient. Lorsque des problèmes de partage sont présentés aux élèves, la conduite la plus fréquente consiste à partitionner les quantités et à écrire le résultat sous la forme d'une fraction ou d'un nombre fractionnaire³⁷. Cependant, les élèves qui adoptent une telle conduite ne conçoivent pas nécessairement la fraction comme étant un quotient. L'étude montre qu'il serait particulièrement difficile pour les élèves d'établir des relations entre les problèmes de partage et la division lorsque les quotients sont inférieurs à 1. Les élèves associeraient les problèmes de partage où le quotient est inférieur à 1 aux fractions et les problèmes de partage où le quotient est supérieur à 1, aux divisions. Enfin, la difficulté pour les élèves à dégager l'équivalence entre a/b et $a \div b$ conduit les chercheurs à considérer l'enseignement explicite comme étant nécessaire. Ces chercheurs notent, par ailleurs, que la tendance à écrire les fractions impropres sous la forme d'un nombre fractionnaire entrave la reconnaissance de cette équivalence.

Enfin, les situations de partage présentent divers intérêts concernant l'enseignement et l'apprentissage des fractions. Elles permettent, selon Empson et ses collaborateurs (2006), de comprendre comment les élèves coordonnent le nombre de personnes et le nombre d'objets à partager et, ainsi, d'observer leur connaissance de la structure multiplicative des fractions. De plus, elles permettent, selon Streefland (1987), de faire ressortir différentes stratégies et de procéder à un examen des productions d'élèves de façon à dégager l'équivalence entre les différentes expressions. Ce type de situations permet cependant difficilement de comprendre la relation entre la fraction et la division. Il est effectivement difficile de comprendre, par exemple, pourquoi on obtient le même résultat lorsque 2 parts d'un gâteau partagé en 5 parts égales sont prélevées ($2/5$) et lorsque 2 gâteaux sont partagés également entre 5 personnes ($2 \div 5$).

³⁷ L'utilisation des nombres fractionnaires est une pratique anglo-saxonne. Les Français, par exemple, recourent plutôt à des nombres avec expansions décimales.

4.2.5 Fraction opérateur (ou scalaire)

L'interprétation opérateur de la fraction est utilisée pour opérer sur des grandeurs. Cette interprétation permet de solutionner des problèmes d'agrandissement ou de réduction d'une grandeur. Dans le cas où a est supérieur à b , la transformation correspond à un agrandissement de la grandeur initiale, et dans le cas inverse, où a est inférieur à b , la transformation correspond à une réduction de la grandeur initiale.

Behr et ses collaborateurs (1993) distinguent deux interprétations de la fraction opérateur. La première, qu'ils nomment *stretcher/shrinker*, est celle que nous avons ici présentée, c'est-à-dire que la fraction opérateur transforme une grandeur initiale en une nouvelle grandeur plus grande ou plus petite que la précédente. La deuxième interprétation, *duplicator/partition-reducer*, consiste non pas à modifier une grandeur, mais plutôt à modifier la référence, c'est-à-dire qu'au lieu de se référer au tout, par exemple, en affirmant qu'une partie donnée représente le $1/8$ de l'entier, on peut se référer à une autre quantité, en affirmant que cette même partie représente $1/4$ de $1/2$ ($1/4 \times 1/2$) ou $1/16$ de 2 ($1/16 \times 2$).

La construction de l'interprétation de la fraction en tant qu'opérateur nécessite de nombreuses coordinations de connaissances. Cette interprétation est ainsi difficile à élaborer; les relations indirectes et les fractions impropres posent en particulier des difficultés. En revanche, comme le montre Blouin (1993), une situation qui s'appuie sur l'interprétation opérateur permet aux élèves de développer des connaissances sur les sens rapport et partie/tout, même si aucun enseignement spécifique sur ces sens n'a été réalisé. De plus, rechercher l'opérateur fractionnaire nécessaire à la résolution d'un problème donné conduit les élèves à coordonner leurs connaissances sur les opérations impliquant des nombres entiers et leurs connaissances sur les fractions.

Notons enfin que l'interprétation opérateur est peu sollicitée pour travailler l'équivalence entre les fractions. Il est cependant possible de le faire : deux fractions sont équivalentes si la transformation qu'elles opèrent est identique.

- Situations typiques et stratégies et/ou difficultés associées

Comme nous l'avons vu précédemment, pour identifier la fraction a/b d'un tout composé de n objets, il est possible de faire appel à l'interprétation partie/tout, mais ce type de tâches peut également solliciter l'interprétation opérateur. Pour rendre cette interprétation nécessaire, il convient de présenter un nombre d'objets élevé. Ce serait le cas, par exemple, d'un problème qui exige d'identifier le nombre de filles dans une foule de 320 personnes si les $3/4$ de ces personnes sont des filles. Le recours à la fraction en tant qu'opérateur ($3/4 \times 320$) est alors beaucoup plus efficace que le recours, par exemple, à la stratégie du double comptage (niveau B). En effet, à partir d'une collection de 320 objets, il faudrait alors faire des groupements de 4, en prélever 3 par groupement et dénombrer le nombre d'objets ainsi prélevés.

L'opérateur fractionnaire peut également s'appliquer à une grandeur impliquée dans un tout continu tel qu'une figure. La situation du puzzle de Brousseau (Brousseau et Brousseau, 1987) est emblématique de cette interprétation. Les élèves sont invités à identifier les mesures d'un puzzle agrandi. Les mesures de longueur du puzzle initial et une seule mesure du puzzle agrandi sont fournies aux élèves. Le rapport entre ces deux mesures étant fractionnaire, il s'agit, pour solutionner le problème, de dégager le rapport fractionnaire permettant de passer d'une mesure initiale (4) à une mesure agrandie (7) et d'appliquer l'opérateur fractionnaire ($\times 7/4$) à toutes les mesures du puzzle initial. Des stratégies qui s'appuient sur le sens rapport sont aussi possibles, mais les nombres sont choisis pour favoriser le recours à l'opérateur fractionnaire.

Blouin (1993), quant à elle, propose une situation qui favorise l'interprétation opérateur de la fraction à partir d'un environnement informatique qui permet aux élèves de commander à l'ordinateur des opérations visant à agrandir ou à réduire les mesures linéaires d'un voilier. Le programme informatique effectue les calculs proposés par les élèves et montre graphiquement le résultat du calcul. Tout comme dans la situation de Picasso³⁸, liée à l'interprétation « rapport », les élèves adoptent couramment des comportements additifs plutôt que multiplicatifs (ex. : ajouter 2 à chacune des mesures). Comme le soulève Blouin (1999), le recours aux structures additives est particulièrement important lorsqu'il s'agit de

³⁸ La situation de Picasso est décrite aux pages 65 et 66.

transformations supérieures à 1. Par exemple, pour comparer un objet A et un objet B dont les mesures sont dans un rapport de $\frac{2}{3}$, certains élèves affirment que A correspond aux $\frac{2}{3}$ de B, mais affirment que B est un tout plus $\frac{1}{3}$.

Notons, finalement, que Diénès (1970) a réalisé plusieurs travaux portant sur le sens opérateur de la fraction. Il propose un modèle d'enseignement à partir de fiches qui vise une construction de la fraction en tant qu'opérateur. La fraction est ainsi associée à la composition d'une chaîne d'opérateurs simples appliquée à des collections. Le modèle de Diénès est cependant critiqué, notamment par Desjardins et Hétu (1974), qui considèrent que ce modèle ne tient pas suffisamment compte du développement logico-mathématique des élèves. Il est aussi critiqué par Brousseau (1998), qui remet en question la structure même de la proposition de Diénès (une suite de « jeux logiques »), considérant que les élèves doivent comprendre les règles pour pouvoir agir sur le jeu, et que ces règles correspondent aux connaissances mathématiques que l'enseignant souhaite transmettre. Les jeux présentés ne permettraient donc pas aux élèves de découvrir les objets de savoir visés.

4.2.6 Recoupements entre les différentes interprétations

Nous avons présenté des situations typiques pour chacune des interprétations. Or, diverses interprétations peuvent être sollicitées pour solutionner un même problème. Une même situation peut effectivement être interprétée de différentes manières. Reprenons, à titre d'exemple, un problème de partage : *5 enfants se partagent également 2 tablettes de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ?* Comme nous l'avons vu précédemment, la résolution de ce problème fait appel à la division. L'interprétation quotient est donc celle qui permet de procéder à l'opération $2 \div 5$ et d'obtenir la fraction $\frac{2}{5}$ comme quotient. Chaque enfant aura donc les $\frac{2}{5}$ d'une tablette. Il est également possible de procéder en partitionnant chacune des tablettes en 5. À chaque enfant, on attribue une partie de chaque tablette issue de cette partition. Chaque enfant reçoit alors $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ et donc $\frac{2}{5}$ d'une tablette. Dans ce cas, la partition de chaque tout fait appel à l'interprétation partie/tout et l'itération de $\frac{1}{5}$ fait appel à l'interprétation mesure où $\frac{2}{5}$ est composé additivement de $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{5}$. Se référant cette fois à l'interprétation opérateur, on pourrait considérer que la quantité de chocolat que recevra

chaque enfant est issue d'une transformation d'une quantité initiale. Considérant la mesure initiale « 2 tablettes de chocolat », et la transformation nécessaire à effectuer pour que chacun des 5 enfants ait une part égale, on peut dégager l'opérateur $1/5$. Ainsi, 2 tablettes de chocolat $\times 1/5 = 2/5$ de tablette de chocolat. Enfin, il est possible de considérer que nous cherchons à établir deux rapports équivalents : 2 tablettes de chocolat pour 5 enfants = x tablette(s) de chocolat pour 1 enfant.

4.2.7 Conclusion

La plupart des recherches suggèrent d'introduire les fractions en présentant des situations qui s'appuient sur l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout. Certains chercheurs considèrent que cette interprétation doit être bien assimilée avant de présenter d'autres interprétations, alors que d'autres considèrent, au contraire, qu'il est préférable d'introduire tôt d'autres interprétations de la fraction. Moseley (2005) a conduit une recherche dans laquelle il étudie l'effet d'un enseignement qui s'appuie exclusivement sur la fraction partie/tout et l'effet d'un enseignement qui s'appuie sur différentes interprétations de la fraction (partie/tout, rapport et opérateur). L'étude dégage l'intérêt d'un enseignement de la fraction qui s'appuie sur une diversité conceptuelle pour permettre aux élèves d'organiser leurs connaissances et de faire des relations avec d'autres notions mathématiques, notamment la multiplication et la division. Les cinq interprétations de la fraction consistent ainsi en un outil conceptuel sur lequel il est possible de s'appuyer pour choisir des situations variées, c'est-à-dire qui sollicitent diverses interprétations de la fraction.

Charalambos et Charalambous Pitta-Pantazi (2007) ont conduit une étude dans laquelle ils ont soumis un test à 646 élèves de 5^e et 6^e années afin d'étudier les relations entre les différentes interprétations de la fraction ainsi que les relations entre les interprétations de la fraction et les opérations sur ces nombres. Le test comprend 50 tâches : neuf liées à l'interprétation partie/tout, six à l'interprétation rapport, quatre à l'interprétation opérateur, cinq à l'interprétation quotient, neuf à l'interprétation mesure, dix tâches portent sur l'équivalence des fractions, quatre sur les opérations multiplicatives et trois sur les opérations additives. Concernant les interprétations de la fraction, les tâches les mieux réussies sont

celles portant sur l'interprétation partie/tout (75 %) et l'interprétation rapport (64 %), suivies de celles sollicitant l'interprétation quotient (55 %) et l'interprétation opérateur (45 %). Les tâches posant le plus de difficulté sont celles liées à l'interprétation mesure (25 %). L'étude montre par ailleurs que les interprétations rapport et opérateur sont fortement associées à l'interprétation partie/tout, alors que les interprétations quotient et mesure lui sont associées dans une moindre mesure. Enfin, l'équivalence des fractions reposerait essentiellement sur l'interprétation rapport, les opérations multiplicatives reposeraient quant à elles principalement sur les interprétations opérateur et quotient et les opérations additives, sur l'interprétation partie/tout. Bien que les résultats de cette étude apportent des informations intéressantes, le taux de réussite et les relations établies pourraient varier considérablement, il nous semble, en modifiant la nature des tâches (contextes, nombres, etc.). Par exemple, les tâches proposées pour solliciter l'interprétation de la fraction en tant que mesure s'appuyaient toutes sur la droite numérique qui est difficile à interpréter pour les élèves en raison notamment de la difficulté à concevoir la fraction comme étant un nombre (et non deux nombres). Si des tâches qui s'appuient sur d'autres contextes avaient été présentées (ex. : mesure de segments à partir d'une bande unité), peut-être que le taux de réussite aurait été plus élevé, que l'association entre cette interprétation et l'interprétation partie/tout aurait été plus prononcée et que des relations entre l'interprétation mesure et les opérations additives auraient été établies.

4.3 Acquisition de la notion de fraction

Pour traiter l'acquisition de la notion de fraction, nous nous appuyons sur les travaux théoriques et empiriques de Desjardins et Héту (1974), Kieren (1989) et Adjiage (1999). Ces recherches nous amènent à distinguer quatre grandes étapes qui peuvent servir de repères pour aborder les changements de perspectives au cours de l'acquisition des fractions (voir tableau 4.1) :

- 1) partition sans traitement multiplicatif;
- 2) coordination partielle des connaissances sur les structures multiplicatives et des connaissances sur les fractions;

- 3) coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et les connaissances sur les fractions;
- 4) les fractions en tant que nombres.

Pour chacune de ces étapes, nous précisons ses caractéristiques, les problèmes pouvant être résolus et les stratégies possibles.

Tableau 4.1
Étapes dans l'acquisition de la notion de fraction selon différents modèles

	Modèle de Desjardins et Hétu	Modèle de Kieren	Modèle de Adjage
Partition sans traitement multiplicatif	Préfraction	Premier niveau	Stade des partitions
Difficulté dans la coordination des connaissances sur les structures multiplicatives et des connaissances sur les fractions	Fraction-quantité	Deuxième niveau	Stade de la relation partie/tout
Coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et les connaissances sur les fractions	Fraction-relation	Troisième niveau	Stade des rationnels-mesures
Les fractions en tant que nombres		Quatrième niveau Cinquième niveau	Stade du nombre rationnel

4.3.1 Partition sans traitement multiplicatif

La première étape se rapporte à la préfraction du modèle de Desjardins et Hétu (1974), au stade des partitions du modèle de Adjage (1999) et au premier niveau du modèle de Kieren (1989). À cette étape, les connaissances sur les structures multiplicatives et sur les fractions (ex. : lecture et écriture des fractions) sont très peu développées.

Les pratiques de partage sur un tout continu se distinguent de celles sur un tout discret, toutes deux s'appuyant sur des opérations de pensée différentes bien qu'elles soient liées.

Citons Vonèche et Parat-Doyan (1994) :

(...) la relation du tout à ses parties peut apparaître de deux manières différentes que Piaget considère comme isomorphes. D'une part, à travers le fractionnement et la reconstitution d'un tout continu en ses parties (point, éléments, fragments). D'autre part à travers la combinaison et la séparation de plusieurs objets discrets. La première manière constitue ce que Piaget appellera l'infiralogique, la deuxième correspond au domaine de la logique. Dans les deux cas, la relation partie/tout est vue en tant que rapport logique d'inclusion. (p. 12)

Pour partager une quantité discrète, les élèves n'ont pas à concevoir l'ensemble des éléments comme un tout. Ils peuvent, par exemple, effectuer le partage égal de 12 bonbons entre 4 enfants en distribuant à tour de rôle un bonbon à chaque enfant. Augmenter le nombre de bonbons rend la distribution effective inefficace et peut conduire à un traitement numérique. Ainsi, pour partager 45 bonbons entre 3 enfants, une stratégie par tâtonnement additif permet, par exemple, de distribuer 10 bonbons à chaque enfant, ensuite 3 et ensuite 2. Étant donné l'absence de connaissances sur les structures multiplicatives, il est cependant difficile à cette étape de donner une réponse approximative et, surtout, d'établir une relation multiplicative entre le tout et les parties. À cette étape, la somme des parties correspond au total, et la relation entre la taille de la part et le nombre de parts est établie. Ainsi, le fait qu'un accroissement de parts entraîne une diminution de la taille des parts (et vice versa) est admis.

Pour diviser un tout continu, il faut coordonner le partage égal de l'entier et la réunion des parties comme faisant partie d'un tout. Comme le soulève Rouche (1998), diviser en parts égales en épuisant le tout est plus ou moins complexe selon, d'une part, le nombre de parties que l'on souhaite obtenir et, d'autre part, la nature du tout. Ainsi, la coordination des opérations d'égalisation des parties et d'épuisement du tout sera fonction des caractéristiques du tout.

En somme, à la première étape, la partition d'une quantité discrète est possible, mais seulement à partir de stratégies ne faisant pas appel aux structures multiplicatives. Quant à la partition d'un tout continu, elle est uniquement possible si la façon d'obtenir un partage égal de l'entier apparaît d'emblée. Autrement, le critère de l'épuisement du tout ou celui de l'égalisation des parties est négligé.

4.3.2 *Coordination partielle des connaissances sur les structures multiplicatives et des connaissances sur les fractions*

Pour décrire la deuxième étape du développement de la notion de fraction, nous nous appuyons sur la fraction-quantité de Desjardins et Hétu (1974), sur le deuxième niveau du modèle de Kieren (1989) et sur le stade de la relation partie/tout de Adjage (1999). Comme le souligne Kieren, les élèves développent des connaissances sur les opérateurs scalaires entiers, lesquels nécessitent le passage des opérations additives aux opérations multiplicatives. L'opérateur scalaire permet effectivement d'établir des relations multiplicatives entre les nombres. Alors qu'à la première étape, les élèves procédaient uniquement à des comparaisons additives (qui impliquent les termes « de plus », « de moins »), les élèves apprennent désormais à établir des comparaisons multiplicatives (qui impliquent cette fois les termes « fois plus », « fois moins »). Le développement des connaissances sur l'opérateur scalaire permet l'établissement d'une première relation multiplicative entre la partie et le tout, qui n'est cependant pas encore totalement contrôlée.

Dans la situation de Picasso proposée par Desjardins et Hétu³⁹, les élèves ne recourent pas immédiatement à la structure multiplicative; les connaissances sur les structures additives prennent le dessus. À la deuxième étape, les élèves peuvent adopter un raisonnement multiplicatif pour solutionner un tel problème, mais la relation entre les rapports équivalents produits et les fractions n'est pas établie. Comme le montrent les conduites des élèves dans la situation proposée par Brousseau (1986b), la référence aux fractions n'est pas nécessaire pour établir une relation multiplicative entre deux quantités. En effet, dans cette situation, les élèves mesurent l'épaisseur de feuilles de papier à partir d'expressions telles que « 14 feuilles; 3 mm », mais le lien entre les deux nombres n'est pas encore un nombre. Ainsi, à cette étape, les élèves ne peuvent mentionner que 14 correspond aux $14/3$ de 3 et que 3 correspond aux $3/14$ de 14, ni d'ailleurs qu'une feuille mesure $3/14$ mm. Ils peuvent cependant comparer l'épaisseur de différents types de feuilles de papier en s'interrogeant sur la relation multiplicative entre le nombre de feuilles et l'épaisseur. Par exemple, ils peuvent reconnaître qu'un papier de type A (3 feuilles; 7 mm) est plus épais qu'un papier de type B (8 feuilles; 12 mm) en dégageant qu'avec 6 feuilles de type A, on a déjà 14 mm.

³⁹ Rappelons que cette situation est présentée aux pages 65 et 66.

Selon Adjage (1999), étant donné que les élèves, au stade de la relation partie/tout, se réfèrent essentiellement à des opérations de report et de subdivision sur des nombres entiers, les élèves n'auraient pas les connaissances nécessaires pour bien comprendre les expressions fractionnaires. Bien qu'ils commencent à établir des relations multiplicatives entre des quantités, ils ont cependant du mal à traiter les fractions comme un rapport entre deux quantités. Ainsi, l'élève comprend l'équivalence des fractions uniquement si elles proviennent d'un même tout de référence (Desjardins et Hétu, 1974). Autrement dit, il comprend que deux fractions sont équivalentes parce qu'elles représentent la même quantité, mais il ne comprend pas l'équivalence des fractions en tant que rapport. Comme le soulève Kieren (1989), les élèves construisent d'abord différents sens de la fraction en fonction des problèmes auxquels ils font face, sans nécessairement établir de liens entre ces sens.

Enfin, contrairement à l'étape précédente, l'élève ne néglige ni le critère de l'épuisement du tout ni celui de l'égalisation des parties dans la partition d'un tout continu. De plus, il peut maintenant partitionner une quantité discrète en ayant recours à une stratégie multiplicative (ex. : recourir à un raisonnement multiplicatif pour partager 45 bonbons entre 3 enfants). Cependant, l'élève n'a pas encore dégagé les opérations nécessaires pour prélever la fraction a/b d'une collection de n objets. Il s'appuie donc sur des objets réels ou sur le dessin pour trouver la solution.⁴⁰ Par exemple, pour trouver les $3/4$ de 12, un élève à la deuxième étape peut utiliser la stratégie de partition sur des tous continus, la stratégie du double comptage (niveaux B et C) ou la stratégie de partition sens-partage (niveaux A et B)⁴¹.

4.3.3 *Coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et les connaissances sur les fractions*

La troisième étape dans le développement de la construction de la notion de fraction s'appuie sur le stade des rationnels-mesures de Adjage (1999), le troisième niveau du modèle de

⁴⁰ Une stratégie strictement numérique pourrait cependant être engagée si les nombres impliqués dans le problème permettent à l'élève, grâce à ses connaissances numériques, de trouver instantanément la réponse (c'est-à-dire sans dégager les calculs qui permettent d'obtenir le résultat). Par exemple, un élève pourrait indiquer que le nombre qui correspond aux $3/4$ de 400 est 300, mais être incapable de trouver celui qui correspond aux $3/4$ de 388.

⁴¹ Les différentes stratégies pour identifier a/b de n objets sont définies aux pages 60 et 61.

Kieren (1989) et la fraction-relation de Desjardins et Hétu (1974). Cette étape se distingue de la précédente parce que les élèves coordonnent désormais leurs connaissances sur les structures multiplicatives et celles sur les fractions. Nous référant à Desjardins et Hétu (1974), nous considérons, à cette étape, que les élèves sont en mesure de comparer des fractions tirées de tous différents, car l'équivalence de celles-ci ne repose pas sur des quantités déterminées par des partages, mais sur les relations que chaque partie entretient avec son tout de référence. Les fractions ne sont plus perçues uniquement comme l'expression de grandeurs absolues; elles peuvent également être interprétées en tant que rapport.

Par ailleurs, alors qu'à l'étape précédente les élèves développent différentes interprétations de la fraction, ils sont ici en mesure d'établir des relations entre celles-ci. Kieren (1989) s'appuie sur l'opérateur multiplicatif scalaire et sur l'opérateur multiplicatif fonction de Vergnaud (1981) pour préciser ces relations. Ces opérateurs, qui peuvent correspondre à des nombres entiers ou non, concernent les problèmes d'isomorphisme de mesures. C'est le cas du problème suivant, qui consiste plus particulièrement en un problème de quatrième proportionnelle : *en roulant à une vitesse constante, un automobiliste a parcouru 220 km en 2 heures; s'il maintient la même vitesse, combien de km parcourra-t-il en 5 heures ?* L'opérateur fonction (aussi appelé taux) permet d'établir la relation entre les deux espaces de mesure. Concernant le problème présenté ci-haut, en faisant $220 \text{ km} \div 2 \text{ heures}$, on obtient l'opérateur fonction qui correspond au nombre de km parcourus par heure, soit 110 km/h. Pour solutionner le problème, un élève peut s'appuyer sur l'opérateur fonction et faire $110 \text{ km/h} \times 5 \text{ heures} = 550 \text{ km}$. Selon Kieren, la construction de l'opérateur fonction unifie l'interprétation de la fraction en tant que quotient et celle en tant que mesure. Effectivement, l'opérateur fonction exprime le quotient de deux dimensions, et en effectuant cette division, on obtient la valeur unitaire (ici, le nombre de km pour une heure). L'opérateur scalaire exprime quant à lui le rapport au sein d'un même espace de mesure. Contrairement à l'opérateur fonction qui correspond à un rapport entre deux unités de mesure (ex. : km/h, g/litre, biscuits/boîte, etc.), un opérateur scalaire est un nombre sans unité de mesure. Dans le problème ci-dessus, en faisant $5 \text{ heures} \div 2 \text{ heures}$, on obtient le nombre $5/2$ (ou $2 \frac{1}{2}$ ou 2,5), qui est l'opérateur scalaire. Un élève peut affirmer qu'en conduisant $5/2$ fois plus

longtemps, l'automobiliste parcourra $5/2$ fois plus de km et, pour obtenir la réponse, faire $220 \text{ km} \times 5/2 = 550 \text{ km}$. La construction de l'opérateur scalaire permet selon Kieren d'unifier la fraction rapport et la fraction opérateur. L'interprétation de la fraction en tant que rapport permet d'établir que 2 heures et 5 heures entretiennent entre eux la même relation multiplicative que 110 km et l'inconnue et que ce rapport est de $5/2$, alors que l'interprétation de la fraction en tant qu'opérateur permet de savoir qu'il faut appliquer cette transformation, c'est-à-dire faire $220 \text{ km} \times 5/2$ pour trouver l'inconnue. Enfin, à cette étape, la structure multiplicative des fractions est dégagée, ce qui permet non seulement d'associer la fraction à une quantité, mais également de la considérer comme un scalaire ou comme une fonction.

Cependant, lorsque les nombres rationnels sont utilisés comme opérateur, ils le sont le plus souvent sous une représentation en nombres décimaux, car ces derniers ressemblent davantage à la forme d'expression numérique maîtrisée que l'écriture fractionnaire (Adjage, 1999). En effet, comme nous l'avons mentionné à la section 4.1 (p. 56-57), la représentation sous la forme de nombres décimaux apparaît comme une extension naturelle du système de numération des nombres entiers. Ainsi, pour agrandir une pièce de puzzle où une longueur de 4 cm a pour image une longueur de 7 cm (problème proposé par Brousseau et Brousseau, 1987), les élèves n'utilisent pas spontanément l'opérateur d'agrandissement $7/4$. Considérant 7 et 4 comme deux entiers distincts, ils procèdent plutôt à la succession de deux opérations (ils divisent par 4 et multiplient par 7) ou trouvent l'opérateur d'agrandissement en nombre décimal (1,75) en divisant 7 par 4.

Enfin, à la troisième étape, un nombre rationnel peut effectivement être utilisé comme opérateur, mais l'opérateur est toujours lié aux objets auxquels il s'applique. Pour résoudre des problèmes classiques de proportionnalité, le tableau de proportionnalité est par conséquent grandement aidant, car il permet aux élèves de gérer le lien de proportionnalité entre les mesures.

4.3.4 Les fractions en tant que nombres

Puisque notre objet de recherche concerne uniquement les connaissances des trois premières étapes, la quatrième étape n'est décrite que brièvement. Elle se rapporte au stade du nombre rationnel de Adjage (1999) ainsi qu'aux quatrième et cinquième niveaux du modèle de Kieren. Les fractions peuvent désormais être utilisées comme opérateur, et ce, sans être attachées aux objets auxquels il s'applique. Adjage rapporte ici un problème proposé par Saenz-Ludlow (1995) que nous traduisons : *J'ai dans ma poche une certaine somme d'argent. Je te donne vingt-cinq quarantième et je donne à Michael quinze quarantième. Quelle proportion de cette somme d'argent me reste-t-il ?* À l'étape précédente, l'élève ressent le besoin de connaître le montant d'argent. Un élève peut néanmoins solutionner le problème, mais pour ce faire, il lui faut transformer les rapports ($25/40$ et $15/40$) en quantités réelles (25 parts sur 40 et 15 parts sur 40), ce qui n'est plus nécessaire à la quatrième étape.

De plus, les élèves sont désormais en mesure de traiter les calculs formels sur les fractions portant sur la comparaison, la somme et le produit de fractions hors de tout contexte de référence. C'est également à cette étape que la technique du produit croisé ($a/b = c/d$ si et seulement si $ad = bc$) prend un sens.

4.4 Modèles d'enseignement de la fraction

Dans la perspective d'élaborer une séquence d'enseignement sur la notion de fraction, nous avons cru nécessaire de faire l'étude des deux modèles d'enseignement de la fraction parmi les plus cités. Si, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, notre séquence ne s'appuie pas sur l'un de ces modèles, leur présentation nous paraît cependant utile pour réfléchir aux conditions didactiques à mettre en œuvre dans notre propre recherche. Ainsi, dans ce qui suit, le modèle de Streefland, qui s'inscrit dans l'approche de la *Realistic Mathematics Education* (RME), et celui de Brousseau, qui s'inscrit dans la *Théorie des situations didactiques* (TSD), sont présentés.

4.4.1 Modèle d'enseignement de Streefland

Pour construire une séquence d'enseignement sur la fraction, Streefland s'appuie sur l'approche de la RME, qui a été élaborée en Hollande à la fin des années 1970 en réaction aux mathématiques modernes (Kuzniak et coll., 2008). Cette approche a grandement été influencée par l'optique de Freudenthal (1968), qui considère que les mathématiques sont une activité humaine et que leur enseignement doit reposer sur la réalité des élèves, sur leur expérience sociale. Streefland (1991) a conduit une étude sur l'enseignement de la fraction dans laquelle 13 élèves du primaire ont été suivis de près durant trois années. Il s'appuie sur un modèle théorique issu de Van Hiele qui comporte trois niveaux : 1) *classroom level, or horizontal mathematization* (il s'agit d'un micro-niveau, on s'intéresse à ce qui se passe dans la classe); 2) *the course level : attaining higher levels through vertical mathematization* (ce qui se passe dans la classe est observé à la lumière des objectifs de la séquence d'enseignement); 3) *the theoretical level* (on s'intéresse ici à la confirmation ou au rejet d'hypothèses, à la production d'énoncés théoriques). Pour élaborer une séquence d'enseignement, il conviendrait dans un premier temps de fournir aux élèves des situations dans lesquelles ils peuvent manipuler, ensuite de les aider à établir des relations entre les manipulations effectuées et les fractions et, finalement, de les amener à penser aux fractions d'une façon strictement mathématique. La formalisation des actions s'effectuerait ainsi progressivement, et ce, à partir de cinq groupes d'activités.

Le premier, *serving up and distributing*, concerne le niveau concret. Différents contextes sont utilisés afin de permettre aux élèves de produire des fractions et d'établir des relations entre elles. Par exemple, les élèves doivent diviser également 3 pizzas entre 4 personnes. Le dessin de cercles permet de représenter les pizzas. Ce type de problèmes conduit les élèves à dégager une variété de stratégies (qui font référence à différentes écritures) qui peuvent être mises en relation (par exemple : $1/4 + 1/4 + 1/4 = 1 - 1/4 = 1/2 + 1/4$). Un autre problème consiste à partager également deux pommes, une petite et une grosse, entre deux enfants (on peut diviser chaque pomme en deux parties égales, et chacun des enfants prend une moitié de chaque pomme). L'analyse des conduites des élèves montre que ces derniers dessinent d'abord les situations de façon à les représenter le plus fidèlement possible (*models of*) et que

peu à peu, le dessin est plutôt utilisé comme outil de résolution (*models for*). La forme n'a alors plus d'importance (par exemple, une pomme peut être représentée par un carré).

Le deuxième groupe d'activités, *seating arrangements and distributing*, consiste à illustrer les situations à partir de diagrammes appropriés afin d'aider les élèves à établir l'équivalence entre des rapports. Par exemple, le diagramme présenté à la figure 4.1 illustre la situation suivante : 18 pizzas doivent être partagées également entre 24 personnes; comme il n'y a pas une table assez grande pour accueillir 24 personnes, on installe deux tables de 12 personnes et, pour que chaque personne ait la même quantité de pizzas, 9 pizzas par table. Ainsi, pour illustrer cette situation, un nombre encerclé représente le nombre de pizzas pour une table et le nombre inscrit sous le cercle, le nombre de personnes entre lesquelles ces pizzas sont partagées. Chaque couple de nombres (nombre encerclé et nombre sous le cercle) forme des rapports équivalents.

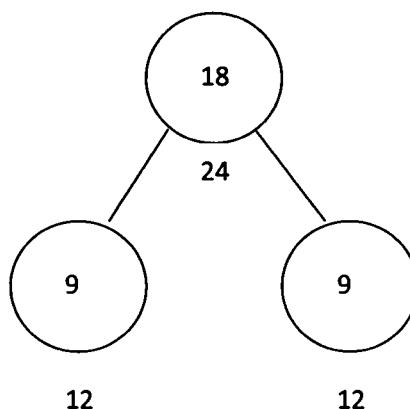


Figure 4.1 : Diagramme permettant d'illustrer l'équivalence de différents rapports

Des variantes sont ensuite proposées telles que ne pas séparer le nombre de personnes également (ex. : 16 personnes à une table et 8 personnes à l'autre table), ou encore diviser le nombre de personnes en plus de deux tables. Divers problèmes qui reposent sur ce contexte sont ensuite présentés. Par exemple, les élèves doivent identifier qui a le plus de pizza entre 4 personnes assises autour d'une table où se trouvent 3 pizzas et 8 personnes assises autour d'une table où se trouvent 7 pizzas. Un autre problème consiste à identifier sur quelle table

était assise une personne qui a mangé, par exemple, $1/2$ pizza, à partir de dessins de tables autour desquels se trouvent des personnes (considérant bien sûr que toutes les pizzas ont été mangées et qu'elles ont été partagées également entre les personnes).

Dans le troisième groupe d'activités, *operating through a mediating quantity*, les quatre opérations sur les fractions sont introduites à partir de problèmes qui comportent des longueurs, des poids et des prix. Par exemple : *Une pizza coûte 5\$. Une personne prend deux morceaux. Un morceau correspond à $1/2$ pizza et l'autre, aux $2/5$ de la pizza. Combien cette personne devra-t-elle déboursier ?* Alors que dans les deux groupes d'activités précédents, la fraction était présentée comme la partie d'un tout, les élèves doivent maintenant également l'utiliser en tant qu'opérateur. Ils développent leur compétence à choisir les opérations à effectuer. De plus, pour aider les élèves à donner du sens aux opérations, des modèles visuels leur sont fournis. Ainsi est montré comment un appui sur le dessin de barres de chocolat permet de donner du sens à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division.

Streefland appelle le quatrième groupe d'activités *doing one's own productions at a symbolic level*. Les activités présentées ici ne s'inscrivent pas dans un contexte extramathématique. Les élèves doivent compléter des égalités allant de $1 - 1/2 = \underline{\hspace{1cm}}$ à $3/4 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$. Ils sont de plus invités à comparer des fractions (ex. : $1/2$ et $1/3$). Les règles des opérations ne sont pas introduites, les élèves sont donc libres d'utiliser les méthodes qu'ils souhaitent. Des questions sont cependant posées pour guider leur réflexion. Par exemple, *pourquoi $1/2 + 1/3 \neq 2/5$?* Enfin, les activités visent essentiellement à amener les élèves à utiliser leurs propres moyens pour produire des fractions équivalentes et pour opérer sur des fractions. Les règles concernant les opérations sur les fractions sont finalement présentées dans le cinquième groupe d'activités : *on the way to arithmetic rules for fractions*.

Streefland présente plusieurs productions d'élèves pour chacun des groupes d'activités et montre, pour différents élèves, le progrès qu'ils ont effectué au cours des rencontres. Il dégage de plus cinq indicateurs pour décrire le processus d'apprentissage des élèves : 1) *concept acquisition and \mathbb{N} -distractor errors*; 2) *progression in schematizing*; 3) *flexible*

use of models, application of diagrams; 4) ability to build mental images of formal problems; 5) individual constructions and productions on a symbolic level.

4.4.2 Modèle d'enseignement de Brousseau

Guy Brousseau, concepteur de la *Théorie des situations didactiques* (TSD)⁴², a élaboré et expérimenté une séquence d'enseignement portant sur les nombres rationnels. Il décrit le déroulement de 65 leçons qui ont été réalisées de 1973 à 1987 (Brousseau et Brousseau, 1987). L'intérêt de chacune des leçons au regard de l'enjeu mathématique est précisé, un examen des variables didactiques est effectué et il y a analyse des conduites types des élèves. Il est proposé, pour l'enseignement des nombres rationnels, de commencer par un enseignement sur les fractions et de s'y appuyer pour introduire l'écriture décimale.

La séquence se divise en six grandes parties. Les nombres rationnels (et plus précisément les fractions) sont d'abord introduits comme des nombres servant à mesurer des longueurs, des masses et des capacités à partir d'une unité de mesure déterminée de façon arbitraire. Les fractions équivalentes et les opérations sur les fractions sont travaillées en s'appuyant sur le contexte de la mesure. La deuxième partie de la séquence conduit les élèves à prendre conscience de l'intérêt de représenter les nombres rationnels par une écriture décimale plutôt que fractionnaire pour comparer des nombres rationnels et pour opérer sur ces nombres puisque l'emploi de cette écriture permet de s'appuyer plus facilement sur les connaissances des nombres naturels. Dans la troisième partie, on s'appuie sur les similitudes géométriques pour introduire les nombres rationnels comme des rapports fonctions et des rapports scalaires. La quatrième partie de la séquence conduit les élèves à rechercher de nouveaux emplois pour les applications linéaires (ex. : pourcentages) et plus particulièrement pour les applications linéaires externes, c'est-à-dire entre des grandeurs de nature différente telles que prix/quantité et vitesse. Dans la cinquième partie, les élèves utilisent et calculent les compositions d'applications linéaires, leurs décompositions en applications naturelles et les applications inverses. La sixième et dernière partie, la seule à ne pas avoir été expérimentée, vise

⁴² Le lecteur peut se référer à la section 2.3.2.1 du chapitre II (p. 37-41) pour obtenir des informations sur la TSD.

notamment à introduire le symbolisme algébrique de façon à formaliser les définitions de quelques termes métamathématiques.

Étant donné l'objectif de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement aux quatre premiers modules de l'ouvrage: 1) les nombres rationnels : construction; 2) les nombres rationnels : opérations; 3) mesures; 4) ordre des rationnels.

L'apprentissage de la fraction s'inscrit d'abord dans un contexte bien précis, et celle-ci se détache peu à peu de ce contexte. L'objectif du premier module est d'amener les élèves à inventer un autre moyen que le poids pour désigner et reconnaître des papiers de différentes épaisseurs. Les élèves sont placés en équipe. L'équipe est à son tour divisée en deux groupes : le groupe émetteur et le groupe récepteur. Les élèves dans le groupe émetteur doivent envoyer un message écrit aux élèves du groupe récepteur afin que ces derniers puissent identifier le type de papier choisi par les élèves du groupe émetteur (les groupes émetteur et récepteur sont séparés afin d'éviter qu'ils communiquent à l'aide de signes). Les élèves du groupe émetteur utilisent les connaissances qu'ils possèdent pour résoudre le problème : mesurer avec une règle. Cependant, l'épaisseur d'une feuille étant plus petite que la plus petite unité de mesure sur la règle (le millimètre), ils rencontrent rapidement les limites de ce procédé et doivent trouver un nouveau moyen. Les élèves sont ainsi amenés à prendre plus d'une feuille pour avoir une épaisseur suffisante. Un des intérêts didactiques de cette situation est que la rétroaction provient du milieu, c'est-à-dire que les élèves du groupe émetteur jugent de l'efficacité de leur message selon que le groupe récepteur réussit ou non à identifier correctement le type de papier choisi. Des messages tels que « papier moyen » s'avèrent peu efficaces lorsqu'il y a plusieurs types de papier. Ensuite, on procède à un retour en grand groupe. Une personne par équipe explique le code choisi. L'enseignant note les messages des différentes équipes dans un tableau et amène les élèves à les comparer et à en discuter. Enfin, dans le premier module, les élèves sont d'abord conduits à utiliser les fractions pour communiquer des épaisseurs de feuilles. Ils doivent ensuite trouver des fractions équivalentes et comparer des fractions entre elles, en se référant au contexte de l'épaisseur de feuilles de papier.

Dans le deuxième module, on s'appuie également sur le contexte des épaisseurs de feuilles, mais cette fois, pour introduire les quatre opérations. Pour amener les élèves à additionner

des fractions, l'enseignant demande d'anticiper l'épaisseur de deux types de feuilles (par exemple, une feuille dont l'épaisseur est de 10/50 mm et une autre dont l'épaisseur est de 40/100 mm). Les élèves peuvent ensuite vérifier leur prévision en utilisant le matériel. En modifiant l'inconnue, les élèves sont amenés à soustraire : l'épaisseur de deux feuilles (qui ont une épaisseur différente) collées ensemble ainsi que l'épaisseur de l'une de ces feuilles sont données et les élèves doivent trouver l'épaisseur de l'autre feuille. Dans ce cas-ci, le matériel sert essentiellement à se représenter la situation; il permet difficilement de vérifier la prévision. Pour introduire la multiplication d'une fraction par un nombre entier, on propose ensuite aux élèves de former des cartons très épais en collant plusieurs feuilles identiques ensemble (ex. : 100 feuilles), de façon à rendre l'addition répétée inefficace. Si l'inconnue, au lieu d'être l'épaisseur du gros carton, est l'épaisseur d'une feuille, les élèves sont amenés à diviser une fraction par un nombre naturel.

Au troisième module, le contexte est modifié : les fractions ne sont plus utilisées pour mesurer des épaisseurs de feuilles de papier, mais plutôt pour désigner la mesure de différents éléments: la capacité de verres, le poids de clous et la longueur de baguettes. Dans tous les cas, il importe de choisir une unité pour mesurer les éléments. Par exemple, pour la capacité de verres, les élèves, qui sont placés en équipe (favorisant ainsi la confrontation des stratégies), disposent d'un verre unité pour comparer le volume des différents verres. Comme le verre n'est pas gradué, les élèves doivent remplir les verres avec les verres unités jusqu'à ce que « ça arrive juste ». Par exemple, pour un verre qui contient les $\frac{3}{4}$ du verre unité, les élèves devraient trouver qu'il faut 3 verres unité pour remplir 4 de ces verres. Un jeu de communication impliquant des émetteurs et des récepteurs permet aux élèves d'éprouver les désignations choisies. Les élèves doivent ensuite non pas attribuer des nombres à des mesures, mais au contraire, construire des mesures à partir de nombres fractionnaires. Pour ce faire, on s'appuie sur le contexte de la mesure de longueur de baguette à l'aide de bandes-unités.

Finalement, le quatrième module s'inscrit dans un contexte intramathématique. Autrement dit, les élèves sont amenés à travailler avec des fractions sans que celles-ci ne fassent référence à un contexte extramathématique. Les activités présentées dans ce module amènent

principalement les élèves à situer les fractions parmi les nombres naturels, ce qui permettra subséquemment d'introduire les nombres décimaux.

Dans la séquence présentée, l'alternance entre l'action, la réflexion individuelle et les discussions entre élèves vise à permettre aux élèves de s'investir dans la résolution des problèmes, de se faire leur propre idée et aussi de remettre en question leurs façons de faire en les confrontant avec celles des autres élèves. Le va-et-vient entre réflexion et action permet aux élèves de bonifier leur stratégie à la lumière des réflexions individuelles et collectives et de les mettre à l'épreuve afin de les valider. Tout au long de la séquence, l'enseignant présente les activités et joue sur les variables didactiques (consignes, choix des nombres, etc.) afin de proposer des activités qui sont adaptées aux connaissances des élèves. Il amène les élèves à agir sur la situation, à exprimer leur façon de faire et à écouter celles des autres. Enfin, bien qu'il y ait quelques phases d'institutionnalisation au cours de la séquence, le rôle de l'enseignant consiste essentiellement à dévoluer le problème aux élèves; le savoir socialement reconnu est principalement présenté à la fin de la séquence.

Notons, par ailleurs, que cette séquence rompt avec les activités habituelles. En effet, dans les manuels scolaires, l'enseignement des fractions débute généralement avec des fractions qui ont 1 comme numérateur et qui ont des dénominateurs plus petits que 10, alors que dans la séquence élaborée par Brousseau, les numérateurs et les dénominateurs sont relativement grands. De plus, la fraction dans les manuels scolaires est presque toujours introduite en référence à la fraction en tant que partie d'un tout, alors que dans la séquence présentée, elle sollicite essentiellement la fraction en tant que mesure. Ainsi, la conception adoptée est celle de la commensurabilité et non pas celle du partage de l'unité. Enfin, dans cette séquence sont proposées des situations qui nécessitent le recours à la fraction et qui, bien souvent, renvoient une rétroaction aux élèves de façon à ce qu'ils adaptent leur conduite en fonction de la réponse du milieu.

En somme, l'apprentissage de la fraction est souvent difficile pour les élèves, car cette notion marque l'entrée dans un nouvel ensemble de nombres : les rationnels. Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, les nombres entiers et les nombres rationnels ne partagent pas

exactement les mêmes propriétés; l'apprentissage des fractions oblige ainsi les élèves à rompre avec certaines connaissances qu'ils ont construites. Les études portant sur le développement de la notion de fraction montrent par ailleurs les difficultés à coordonner les connaissances sur la fraction et celles sur les structures multiplicatives. Selon Kieren, la construction de la fraction reposerait sur l'intégration et la coordination de différentes interprétations de la fraction, c'est-à-dire de différents sens qu'elle peut prendre, selon les situations. Il est donc important, dans l'enseignement, de diversifier les situations pour aborder les différents sens de cette notion et ainsi favoriser l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction. Enfin, bien que de nombreuses études se soient intéressées à l'apprentissage et à l'enseignement de la fraction, aucune d'elles, à notre connaissance, n'a porté sur l'articulation de différentes situations sur la fraction dans le cadre d'un dispositif d'aide aux élèves identifiés en difficulté d'apprentissage.

CHAPITRE V

MÉTHODOLOGIE

Notre recherche, rappelons-le, vise à étudier les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction, et plus particulièrement sur l'équivalence des fractions. Dans ce chapitre, nous identifions parmi les conditions didactiques relevées dans les écrits scientifiques celles qui nous semblent favorables pour l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Nous nous appuyons sur les conditions retenues pour fonder la séquence d'enseignement qui est par la suite exposée. Les dernières sections de ce chapitre sont consacrées à l'opérationnalisation et à l'instrumentation de la méthodologie de recherche ainsi qu'à la démarche éthique.

5.1 Conditions didactiques retenues

Cette section se rapporte au premier objectif spécifique de notre recherche : identifier dans les écrits scientifiques des conditions didactiques qui apparaissent favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les travaux portant sur la mise à l'épreuve de la *Théorie des situations didactiques* (TSD) en contexte d'adaptation scolaire, particulièrement sur ceux de Giroux (2013), ainsi que sur les travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fraction. Les conditions didactiques retenues sont regroupées en trois catégories :

- 1) les conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension didactique;
- 2) les conditions relatives à la décontextualisation des connaissances;
- 3) les conditions spécifiques au contenu mathématique en jeu, c'est-à-dire l'équivalence des fractions.

5.1.1 Conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension adidactique⁴³

Cette première catégorie s'appuie sur la TSD (Brousseau, 1998) qui s'intéresse aux caractéristiques que doivent posséder les situations pour favoriser l'apprentissage. L'adidacticité des situations en est une. La situation est alors construite de manière à ce que les élèves puissent prendre des décisions, proposer des stratégies et évaluer leur efficacité. Les actions sont ainsi gérées par la logique interne de la situation. L'adidacticité des situations pourrait contribuer à contrer certains phénomènes didactiques propres à l'adaptation scolaire qui ne favorisent pas l'apprentissage tels que le morcellement du savoir (René De Cotret et Giroux, 2003; Cherel, 2005). En effet, en morcelant le savoir, les actions des élèves sont « guidées » par les implicites contenus dans l'organisation du morcellement (et alors, par l'intention d'enseignement) et non pas par des décisions autonomes (d'un point de vue cognitif) de l'élève cherchant à rééquilibrer un milieu qui l'a mis en déséquilibre. Le morcellement évite de déséquilibrer le rapport élève/milieu et réduit ainsi l'enjeu relatif au savoir. Enfin, certains phénomènes relevés en adaptation scolaire conduiraient à ne pas proposer des situations qui présentent réellement un enjeu pour les élèves, ce qui pourrait expliquer le manque d'investissement souvent attribué aux élèves en difficulté. L'adidacticité des situations nous semble particulièrement intéressante en contexte orthopédagogique, car le nombre plus restreint d'élèves conduit souvent l'orthopédagogue à piloter trop fort les échanges et même à prendre en partie à sa charge la part du travail qui devrait revenir à l'élève (Mary, 2003).

Pour favoriser la mise en œuvre de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique, nous retenons trois conditions didactiques.

- Aménager le milieu de façon à fournir une rétroaction rapide

Il arrive que certains élèves, plus particulièrement les élèves en difficulté, persistent dans l'utilisation d'une stratégie inefficace, malgré la rétroaction envoyée par le milieu. Pour que

⁴³ Nous appuyant sur Mercier (1995), nous avons choisi l'expression « situation à dimension adidactique », car nous apportons certaines adaptations qui conduisent à ne pas respecter l'ensemble des conditions qui caractérisent une situation adidactique.

la rétroaction puisse jouer son rôle, Giroux (2013) propose d'organiser le milieu de façon à favoriser une rétroaction rapide sur la pertinence des connaissances engagées. Diminuer le temps entre l'action et la rétroaction du milieu pourrait effectivement favoriser la liaison entre le contenu de l'anticipation et la rétroaction. De plus, nous faisons l'hypothèse que cette rétroaction rapide contribuerait à modifier le contrat de dépendance à l'égard de la validation amenée par l'orthopédagogue.

- Soutenir la mise en œuvre d'une stratégie finalisée

En ce qui a trait au pilotage des situations à dimension adidactique, comme le relèvent Giroux (2013) et Salin (2007b), il peut être difficile, dans certains cas, de favoriser l'autonomie complète de l'élève, conformément à ce que prévoit la TSD. Il arrive effectivement que les élèves ne soient pas en mesure de mettre en œuvre une stratégie de solution, ou qu'ils utilisent une stratégie correcte en éprouvant toutefois des difficultés à la contrôler et à la finaliser. Il peut alors s'avérer nécessaire d'accompagner un élève pour qu'il puisse agir sur le milieu et recevoir une rétroaction. Ce soutien semble envisageable dans le contexte orthopédagogique étant donné le nombre restreint d'élèves. Cependant, il paraît important de bien calibrer l'accompagnement des élèves. La fonction même du service orthopédagogique (soutenir les élèves en difficulté) ainsi que la relation étroite entre l'orthopédagogue et les élèves pourraient conduire certains élèves à attendre du support plutôt qu'à prendre des risques dans la recherche d'une solution. L'expérimentation d'une telle condition est nécessaire pour identifier des pistes servant au calibrage de l'accompagnement en contexte orthopédagogique.

- Prendre en compte les objets de savoir non prévus mais investis par les élèves

Les élèves en difficulté convoqueraient, plus souvent que les autres, des connaissances différentes de celles prévues par la situation. Considérer les objets de savoirs qu'ils investissent favoriserait, selon Giroux (2013), la coordination de leurs connaissances et le maintien de leur engagement mathématique. En raison du nombre restreint d'élèves avec lequel il travaille, l'orthopédagogue peut plus facilement reconnaître les connaissances engagées dans les stratégies utilisées pour résoudre le problème et accéder à la façon dont les

élèves interprètent le problème, ce qui permet de saisir les opportunités qu'apporte une situation pour travailler des objets de savoir non prévus par l'analyse *a priori*.

5.1.2 Conditions relatives à la décontextualisation des connaissances

Pour favoriser la décontextualisation des connaissances, nous retenons deux conditions didactiques : assurer une variété de situations mathématiques et prévoir des moments de décontextualisation tout au long de la séquence.

- Assurer une variété de situations mathématiques

Comme le soulève Giroux (2013), les difficultés en mathématiques de certains élèves ne proviendraient pas d'un manque de connaissances, mais plutôt de relations inopérantes entre ces connaissances et les situations mathématiques pour lesquelles ces connaissances sont utiles. La chercheuse propose par conséquent d'élargir le caractère d'utilité des connaissances en proposant des situations mathématiques variées de façon à aider les élèves à décontextualiser leurs connaissances. Concernant l'enseignement et l'apprentissage des fractions, pour assurer une variété de situations mathématiques, nous nous appuyons notamment sur les différentes interprétations de la fraction, selon le modèle de Kieren (1976, 1980, 1989).

- Prévoir des moments de décontextualisation tout au long de la séquence

Pour aider les élèves en difficulté dans la décontextualisation de leurs connaissances, nous retenons par ailleurs la proposition de Perrin-Glorian (1993), selon laquelle l'institutionnalisation se déroule tout au long de l'enseignement afin de mettre en valeur les éléments importants pour la compréhension du savoir. Ainsi peuvent être dégagées les écritures mathématiques qui représentent ce qui a été fait dans la situation didactique. Proposer des exercices, qui sont davantage de nature répétitive que les situations didactiques, pourrait également servir au processus d'institutionnalisation. En effet, il conviendrait, selon Salin (2007a) et Douady (1984), de proposer des exercices conventionnels pour permettre aux élèves, et plus particulièrement encore aux élèves en

difficulté, d'identifier ce qui dans la situation adidactique relève du savoir mathématique, et ainsi d'intégrer ce savoir. De plus, comme les exercices ressemblent davantage à ce qui est fait en classe que les situations adidactiques (Cherel et Giroux, 2002; Bloch et Salin, 2004), ils pourraient être favorables au transfert des apprentissages, du contexte orthopédagogique à la classe. Précisons que nous avons opté pour l'expression « moment de décontextualisation » plutôt que « moments d'institutionnalisation », considérant pertinent de présenter des exercices qui peuvent déborder de ce qui a été fait dans la situation adidactique.

Par ailleurs, Giroux (2013) soulève l'intérêt de moments d'institutionnalisation fondés sur l'identification des régularités d'un milieu « mathématisé ». En interaction avec un milieu mathématisé, l'élève serait porté à établir des relations sur des objets mathématiques, des régularités mathématiques, « réinterprétables » dans des contextes spécifiques. Il s'agit d'une partie importante du processus de décontextualisation des connaissances, et les élèves en difficulté y seraient particulièrement sensibles, car dégager des régularités permet d'exercer un contrôle sur la situation.

5.1.3 Conditions spécifiques à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions

À la suite de la recension des travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la fraction, des conditions didactiques relatives à la spécificité du savoir sont retenues. Ces conditions, visant plus particulièrement la construction de l'équivalence des fractions, doivent permettre de couvrir différentes interprétations de la fraction selon le modèle de Kieren et de dégager la structure multiplicative de la fraction en faisant échec aux stratégies additives dans la comparaison de fractions⁴⁴.

⁴⁴ L'équivalence des fractions est l'un des cas de figure de la comparaison de fractions. En effet, quand on compare les fractions a/b et c/d , soit $a/b < c/d$, soit $a/b > c/d$, soit $a/b = c/d$.

- Couvrir différentes interprétations de la fraction selon le modèle de Kieren

S'appuyer sur les différentes interprétations⁴⁵ de la fraction de Kieren (1976, 1980, 1989) permet de choisir des situations variées et, ainsi, de tenir compte des différentes formes d'utilité de la fraction. Comme le montre notamment l'étude de Moseley (2005), un enseignement de la fraction qui s'appuie sur les différentes interprétations favorise l'organisation des connaissances et la mise en relation avec d'autres notions mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que cette condition est aussi importante pour une intervention auprès d'élèves en difficulté que pour une intervention auprès d'élèves « ordinaires ». Enfin, concernant plus précisément l'équivalence des fractions, la variation des interprétations permet de concevoir l'équivalence non seulement en termes de quantités, mais également en termes de rapports. En effet, dans le contexte des opérateurs et des rapports, il n'est pas possible d'interpréter l'équivalence des fractions comme l'égalité des quantités.

- Dégager la structure multiplicative de la fraction en faisant échec aux stratégies additives dans la comparaison de fractions

Tenant compte de la spécificité du savoir en jeu, nous nous appuyons sur les travaux portant sur l'apprentissage de la fraction pour anticiper les conduites et les difficultés des élèves. Comme le relèvent plusieurs études, notamment celle de Blouin (1993) et celle de Desjardins et Héту (1974), même lorsque les élèves possèdent des connaissances sur les structures multiplicatives, ils recourent souvent à leurs connaissances sur les structures additives, qu'ils maîtrisent davantage, pour comparer des fractions. Il apparaît donc souhaitable de penser à des situations qui conduisent les élèves à rencontrer l'inadéquation de stratégies additives lors d'un travail sur la comparaison de fractions.

⁴⁵ Le lecteur peut se référer à la section 4.2 du chapitre IV (p. 58-72), dans laquelle les cinq interprétations de la fraction de Kieren sont définies.

5.2 Présentation de la séquence

Cette partie se rapporte au deuxième objectif spécifique de notre recherche : élaborer une séquence d'enseignement sur la fraction adaptée au contexte orthopédagogique en s'appuyant sur les conditions didactiques retenues. La recherche étant exploratoire, nous adoptons une posture de flexibilité afin de permettre à la chercheuse⁴⁶ de modifier la séquence au cours de l'expérimentation. Ainsi, si de nouvelles conditions didactiques sont identifiées, la chercheuse pourra modifier la séquence de façon à tenir compte de celles-ci.

La séquence⁴⁷ porte sur la notion de fractions équivalentes et vise, plus particulièrement, l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction. Elle comporte quatre situations. Chacune d'elles s'appuie sur une interprétation différente de la fraction, selon le modèle de Kieren. Dans les sections qui suivent, nous présentons, pour chaque situation : les scénarios et les moments de décontextualisation qui composent la situation, une anticipation des conduites des élèves et, finalement, une justification de la situation.

5.2.1 Situation sur la fraction en tant que partie d'un tout continu⁴⁸

Cette situation vise à ce que les élèves établissent la relation multiplicative entre une fraction $1/b$ et une fraction c/d , où b est multiple de d . Le but poursuivi par les élèves est d'identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/b$ d'une figure, nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure.

5.2.1.1 Scénarios et moments de décontextualisation

La première situation comporte cinq scénarios. Le tableau 5.1 présente l'enjeu mathématique de chacun d'eux.

⁴⁶ L'expérimentatrice est la chercheuse.

⁴⁷ La séquence a été élaborée par la chercheuse, Virginie Houle, et la directrice de la thèse, Jacinthe Giroux.

⁴⁸ Le matériel de la première situation est disponible à l'annexe G.

Tableau 5.1
Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la première situation

Scénario 1	a) Pour recouvrir $1/2$ cercle : - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/4$ du cercle - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/6$ du cercle b) Pour recouvrir $1/2$ rectangle : - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/8$ du rectangle - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/12$ du rectangle
Scénario 2	Pour recouvrir $1/3$ d'un rectangle : - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/6$ du rectangle - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/9$ du rectangle - Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à $1/12$ du rectangle
Scénario 3	a) Identifier à quelle fraction du rectangle correspond une pièce quand il faut 2 copies de cette pièce pour recouvrir : - $1/2$ rectangle - $1/3$ du rectangle - $1/6$ du rectangle b) Identifier à quelle fraction du rectangle correspond une pièce quand il faut 3 copie de cette pièce pour recouvrir : - $1/2$ rectangle - $1/3$ du rectangle - $1/6$ du rectangle
Scénario 4	Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à : - $1/10$ du pentagone pour recouvrir $1/5$ du pentagone - $1/10$ du pentagone pour recouvrir $2/5$ du pentagone - $1/20$ du pentagone pour recouvrir $2/5$ du pentagone
Scénario 5	Identifier combien il faut de pièces qui correspondent à : - $1/12$ d'une figure quelconque pour recouvrir $1/3$ de cette figure - $1/20$ d'une figure quelconque pour recouvrir $1/5$ de cette figure - $1/10$ d'une figure quelconque pour recouvrir $2/5$ de cette figure - $1/30$ d'une figure quelconque pour recouvrir $1/15$ de cette figure

Les quatre premiers scénarios reposent sur un jeu de communication, classique dans la TSD, dans lequel les élèves doivent remplir un bon de commande pour recouvrir complètement une figure partitionnée. Chaque partie de la figure partitionnée doit être recouverte sous des contraintes différentes. Autrement dit, chaque partie de la figure donnée, qui correspond à

une fraction c/d , doit être recouverte par un certain nombre de pièces de type $1/b$ de manière à ce que $a \times 1/b = c/d$, où b est multiple de d , et où a est le nombre de pièces. Le nombre à commander est soit a (scénarios 1, 2, 4 et 5), soit la grandeur associée à $1/b$ (scénario 3). C'est l'expérimentatrice qui reçoit le bon de commande et donne aux élèves les pièces qu'ils ont commandées. La rétroaction est assurée par la superposition effective des pièces obtenues sur la partie à couvrir de la figure. Le cinquième et dernier scénario ne met en jeu aucune situation de communication et porte essentiellement sur un travail numérique pour établir des relations multiplicatives et des relations d'équivalence entre fractions. La présentation de la figure, qui succède ici au travail sur ces relations, sert à la validation des relations établies par les élèves.

- Scénario 1

L'expérimentatrice remet aux élèves une figure ainsi qu'un bon de commande à compléter, et les élèves doivent s'entendre sur le nombre de pièces à commander.

Le scénario 1 se divise en deux sous-scénarios : les scénarios 1a et 1b.

Scénario 1a

Figure : un cercle partitionné en deux parties d'aires égales

Bon de commande :

Partie A : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/4$ du cercle pour recouvrir $1/2$ cercle.

Partie B : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/6$ du cercle pour recouvrir $1/2$ cercle.

Scénario 1b

Figure: un rectangle partitionné en deux parties d'aires égales

Bon de commande :

Partie A : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/8$ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.

Partie B : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/12$ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.

Décontextualisation

À la suite du scénario 1, l'expérimentatrice remet aux élèves un tableau récapitulatif qu'ils doivent compléter. Notons que le nombre de pièces de $1/20$ pour obtenir $1/2$ ne peut être identifié en s'appuyant sur les figures traitées précédemment.

Nombre de pièces	Fraction correspondant à la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	$1/4$	$1/2$
	$1/6$	$1/2$
	$1/8$	$1/2$
	$1/12$	$1/2$
	$1/20$	$1/2$

L'exercice vise à dégager que a pièces de $1/b$ permet de recouvrir a/b du tout ($a \times 1/b = a/b$) et que $a/b = 1/2$. Il vise ainsi à reconnaître qu'il y a plusieurs écritures équivalentes à $1/2$ et, plus particulièrement, à reconnaître que chaque fois que le numérateur correspond à la moitié du dénominateur, il s'agit d'une écriture équivalente à $1/2$. Pour ce faire, l'écriture mathématique est utilisée de façon, d'une part, à dégager dans ce que les élèves ont fait ce qui relève du savoir mathématique et, d'autre part, à favoriser l'identification de régularités mathématiques. Par exemple, la relation entre le recouvrement de $1/2$ cercle à partir de 2 pièces de $1/4$ du cercle et l'écriture $2 \times 1/4 = 2/4 = 1/2$ est établie. Les fractions ainsi produites sont ensuite mises en relation en s'appuyant sur une propriété de l'égalité, la transitivité : si $A = B$ et $A = C$, alors $B = C$. Une liste de fractions équivalentes est alors produite : $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 6/12 = 10/20$. Les élèves sont ensuite invités à trouver d'autres fractions équivalentes à $1/2$. L'idée est que la notion d'équivalence ne soit pas seulement établie à partir de la règle $x/y \times y/y$ (c'est-à-dire en multipliant le numérateur et le

dénominateur par un même nombre), mais à partir du rapport entre le numérateur et le dénominateur.

- Scénario 2

L'expérimentatrice remet aux élèves une figure, et chaque élève dispose d'un bon de commande différent. Les élèves doivent donc travailler individuellement pour anticiper le résultat.

Figure : un rectangle partitionné en trois parties d'aires égales

Trois bons de commande (que se distribuent trois élèves d'une même équipe) :

Partie A : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/6$ du rectangle pour recouvrir $1/3$ du rectangle.

Partie B : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/9$ du rectangle pour recouvrir $1/3$ du rectangle.

Partie C : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/12$ du rectangle pour recouvrir $1/3$ du rectangle.

Décontextualisation

Compléter pour obtenir des fractions équivalentes : $1/3 = a/6 = b/9 = c/12 = d/27 = 11/e$

- Scénario 3

L'expérimentatrice remet aux élèves une figure. Au lieu de rechercher a , les élèves doivent ici identifier la valeur de $1/b$. Ils doivent, en équipe, compléter un premier bon de commande dans lequel $a = 2$ (scénario 3a) et, ensuite, un deuxième bon de commande dans lequel $a = 3$ (scénario 3b). L'expérimentatrice remet finalement aux élèves les pièces commandées afin qu'ils puissent évaluer l'adéquation de leur solution.

Figure pour les scénarios 3a et 3b : un rectangle partitionné en trois parties d'aires inégales ($1/2$, $1/3$ et $1/6$)

Bon de commande du scénario 3a :

Partie A : J'ai besoin de 2 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.
Partie B : J'ai besoin de 2 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/3$ du rectangle.
Partie C : J'ai besoin de 2 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/6$ du rectangle.

Bon de commande du scénario 3b :

Partie A : J'ai besoin de 3 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.
Partie B : J'ai besoin de 3 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/3$ du rectangle.
Partie C : J'ai besoin de 3 pièces correspondant à _____ du rectangle pour recouvrir $1/6$ du rectangle.

Décontextualisation

Répondre aux questions suivantes (s'appuyer sur la figure est insuffisant pour répondre aux questions marquées d'un astérisque) :

- Quelle fraction est 2 fois plus petite que $1/2$?*
- Quelle fraction est 2 fois plus petite que $1/3$?*
- Quelle fraction est 2 fois plus petite que $1/6$?*
- Quelle fraction est 2 fois plus petite que $1/9$? **
- Quelle fraction est 3 fois plus petite que $1/2$?*
- Quelle fraction est 3 fois plus petite que $1/3$?*
- Quelle fraction est 3 fois plus petite que $1/6$?*
- Quelle fraction est 3 fois plus petite que $1/9$? **
- Quelle fraction est 4 fois plus petite que $1/2$? **

Le choix des nombres vise à favoriser la relation avec les scénarios 3a et 3b en reprenant les mêmes relations numériques et, peu à peu, à dégager les régularités de façon à se détacher du matériel. Notons cependant que les questions s'appuient sur les relations scalaires pour comparer deux fractions, ce qui est nouveau dans la situation. Les questions présentées ici permettent ainsi d'établir la relation suivante : s'il faut a pièces de $1/b$ pour obtenir c/d , alors c/d est a fois plus grand que $1/b$ (ou $1/b$ est a fois plus petit que c/d).

- Scénario 4

L'expérimentatrice remet aux élèves une figure ainsi qu'un bon de commande à compléter. Les élèves doivent s'entendre sur le nombre de pièces à commander.

Figure : un pentagone partitionné en trois parties d'aires inégales ($1/5$, $2/5$ et $2/5$)

Bon de commande :

Partie A : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/10$ du pentagone pour recouvrir $1/5$ du pentagone.
Partie B : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/10$ du pentagone pour recouvrir $2/5$ du pentagone.
Partie C : J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/20$ du pentagone pour recouvrir $2/5$ du pentagone.

Décontextualisation

Nombre de pièces	Fraction correspondant à la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	$1/10$	$1/5$
	$1/10$	$2/5$
	$1/20$	$2/5$

Les élèves complètent le tableau, et l'expérimentatrice institutionnalise les écritures suivantes :

2 pièces de $1/10$ se représentent numériquement par $2 \times 1/10 = 2/10 = 1/5$;

4 pièces de $1/10$ se représentent numériquement par $4 \times 1/10 = 4/10 = 2/5$;

8 pièces de $1/20$ se représentent numériquement par $8 \times 1/20 = 8/20 = 2/5$.

- Scénario 5

Contrairement aux scénarios précédents, l'expérimentatrice remet d'abord aux élèves un tableau qu'ils doivent compléter en équipe. La figure partitionnée et les pièces sont remises par la suite pour que les élèves vérifient leurs prévisions.

Tableau à compléter :

Nombre de pièces	Fraction correspondant à la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	$1/12$	$1/3$
	$1/20$	$1/5$
	$1/10$	$2/5$
	$1/30$	$1/15$

Figure (pour valider les résultats) : un rectangle partitionné en quatre parties d'aires inégales ($1/3$, $1/5$, $2/5$ et $1/15$).

Décontextualisation

Compléter les listes de fractions équivalentes suivantes :

$$1/5 = a/20 = b/30 = c/35 = 9/d$$

$$4/5 = e/20 = f/30 = g/35 = h/45$$

5.2.1.2 Conduites anticipées

Trois conduites générales, c'est-à-dire pouvant être mises en œuvre dans chacun des scénarios avec des adaptations locales, sont anticipées. Le jeu sur les contraintes de chacun des scénarios vise à favoriser la mise en œuvre progressive de stratégies évoluées.

Conduite A : Interpréter la fraction $1/b$ seulement au regard de c/d . Ainsi, l'élève interprète c/d comme le tout de référence.

Conduite B : Partitionner « mentalement » la figure pour identifier la relation multiplicative entre $1/b$ et c/d . L'élève tente alors de partitionner la figure en b parties égales pour ensuite identifier le nombre de $1/b$ dans c/d .

Conduite C : Établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre $1/b$ et c/d de manière à ce que $a \times 1/b = c/d$. Cette interprétation conduit à prendre en compte la relation multiplicative entre $1/b$ et c/d pour identifier a .

5.2.1.3 Justification de la situation

Étant donné que le sens partie/tout est le premier à être construit par les élèves et que ce sens permet difficilement d'appréhender la structure multiplicative de la fraction, la première situation vise globalement à enrichir l'interprétation de la fraction partie/tout par la prise en compte des relations multiplicatives entre partie et partie d'un même tout. Ainsi, dans cette situation, une fraction de type $1/b$ d'une figure donnée doit être mise en relation multiplicative avec une fraction plus grande, de type c/d , de cette même figure. Pour favoriser cette mise en relation, b est un multiple de d . Le défi pour les élèves est donc de modifier leur rapport à la référence afin que la fraction $1/b$ soit mise en relation non seulement avec l'entier (b/b) mais également avec une autre fraction (c/d).

Au cours des scénarios, le jeu sur les valeurs des variables vise à ce que les élèves puissent d'abord s'appuyer sur l'interprétation de la fraction partie/tout pour ensuite, progressivement, établir la relation de parties à parties. Ainsi, le choix des fractions et des figures rend de plus en plus complexe la stratégie consistant à partitionner « mentalement » la figure pour solutionner le problème. Plus la situation progresse, plus les élèves sont amenés à traiter la relation multiplicative entre $1/b$ et c/d et à établir des fractions équivalentes (les équivalences

entre différentes relations de type $a \times 1/b = a/b = c/d$ tirées d'une même figure) dans un milieu numérique, c'est-à-dire sans l'appui de la figure.

5.2.2 Situation sur la fraction en tant que mesure

La deuxième situation, inspirée d'un travail de Salin (2006), vise d'abord à ce que les élèves recourent à des fractions pour exprimer la longueur d'un segment et, ensuite, à ce qu'ils établissent, toujours en contexte de mesure, les relations suivantes : 1) $n + a/b = (nb + a)/b$; 2) $a \times 1/b = c/d$, où soit b est un multiple de d (ex. : $6 \times 1/8 = 3/4$), soit c/d est un nombre naturel (ex. : $8 \times 1/4 = 2$). Elle vise finalement à ce que les élèves puissent comparer différentes mesures de grandeurs non entières à partir d'écritures fractionnaires.

Le but poursuivi par les élèves, au scénario 1, est d'élaborer ou d'interpréter un message numérique indiquant la longueur d'un segment dont la mesure correspond à une fraction impropre d'une bande-unité. Dans le scénario 2, le but consiste à obtenir une longueur donnée à partir de la répétition de $1/b$ de la bande-unité. Des énoncés de problème engageant diverses mesures de grandeurs (heures, kilogrammes, litres) sont finalement présentés. L'expression « énoncés de problème » est utilisée pour désigner des problèmes écrits qui n'offrent pas de rétroaction aux élèves.

5.2.2.1 Scénarios et moments de décontextualisation

Le tableau 5.2 précise l'enjeu mathématique des deux scénarios qui composent la deuxième situation.

Tableau 5.2
Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la deuxième situation

Scénario 1	<p>Envoyer un message à l'expérimentatrice pour qu'elle trace un segment de même longueur.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Longueur du premier segment : $2 \frac{1}{2}$ bandes - Longueur du deuxième segment : $2 \frac{1}{4}$ bandes - Longueur du troisième segment : $1 \frac{2}{3}$ bande
Scénario 2	<p>a) Obtenir une longueur de $\frac{1}{2}$ bande-unité par l'itération de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\frac{1}{6}$ de la bande-unité - $\frac{1}{8}$ de la bande-unité - $\frac{1}{12}$ de la bande-unité <p>b) Obtenir une longueur de $\frac{3}{4}$ de la bande-unité par l'itération de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\frac{1}{4}$ de la bande-unité - $\frac{1}{8}$ de la bande-unité - $\frac{1}{12}$ de la bande-unité <p>c) Obtenir une longueur de 2 bandes-unités par l'itération de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\frac{1}{6}$ de la bande-unité - $\frac{1}{8}$ de la bande-unité - $\frac{1}{12}$ de la bande-unité <p>d) Obtenir une longueur de $\frac{3}{2}$ bande-unité par l'itération de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\frac{1}{6}$ de la bande-unité - $\frac{1}{8}$ de la bande-unité - $\frac{1}{12}$ de la bande-unité

- Scénario 1

Dans le scénario 1, les élèves doivent exprimer numériquement la mesure d'un segment, dessiné sur une feuille, à partir d'une bande-unité (bande de papier facilement pliable) dans un jeu de communication. C'est l'expérimentatrice qui reconstruit le segment, sur un transparent, à partir du message produit par les élèves. La superposition du transparent sur la feuille de l'élève permet de comparer les deux segments et de juger de l'adéquation du message produit par les élèves. Ce scénario est composé de trois problèmes qui comportent des segments dont la mesure peut s'écrire en nombre fractionnaire : $2 \frac{1}{2}$ bandes-unités, $2 \frac{1}{4}$ bandes-unités et $1 \frac{2}{3}$ bande-unité.

Décontextualisation

Après le travail sur chacun des segments, les élèves doivent comparer une mesure exprimée sous la forme $n + a/b$ à la fraction impropre qui lui est équivalente, de type $(nb + a)/b$. Les problèmes proposés visent à favoriser des moments de formulation pour juger de l'équivalence avec des allers/retours de validation à l'aide du matériel, si nécessaire. Ainsi, une fois que les élèves ont trouvé un message correct, l'expérimentatrice les interroge : *Vous m'avez dit que le segment mesurait $n + a/b$ bandes-unités. Dans un autre groupe, les élèves m'ont dit que ce segment mesurait $(nb + a)/b$ de la bande-unité. Ce message est-il correct ? Pourquoi ?*

Fractions à comparer après le premier segment : $2 \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$

Fractions à comparer après le deuxième segment : $2 \frac{1}{4}$ et $\frac{9}{4}$

Fractions à comparer après le troisième segment : $1 \frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{6}$, $1 \frac{8}{12}$, $1 \frac{4}{6}$, $1 \frac{3}{4}$

Si les élèves ne recourent pas aux bandes pour fonder ou valider leur jugement de comparaison, l'expérimentatrice les incite à le faire.

- Scénario 2

Au scénario 2, quatre problèmes sont présentés. Dans chacun des problèmes, les élèves doivent obtenir une longueur de bande donnée à partir de la juxtaposition répétée de bandes $1/b$. Dans les problèmes a), b) et c), les longueurs à obtenir sont les suivantes : $\frac{1}{2}$ bande, $\frac{3}{4}$ de bande, 2 bandes. Les élèves ont devant eux une bande qui correspond à la longueur à obtenir et l'expérimentatrice met sur une table éloignée des fractions de bandes : des $\frac{1}{6}$, des $\frac{1}{8}$ et des $\frac{1}{12}$ (la fraction est écrite sur chacune d'elles). Dans le cas du problème B, $\frac{1}{6}$ est modifié par $\frac{1}{4}$: la fraction est choisie de façon à ce qu'elle entre un nombre entier de fois dans la longueur à obtenir. Ainsi, au problème a), les élèves doivent d'abord s'entendre sur le nombre de $\frac{1}{6}$ d'unité nécessaire pour obtenir $\frac{1}{2}$ bande-unité. Ils en discutent entre eux et l'un des élèves va chercher le nombre de $\frac{1}{6}$ choisis. Les élèves valident ensuite leur choix en juxtaposant les bandes de $\frac{1}{6}$ d'unité rapportées à $\frac{1}{2}$ bande-unité.

Au problème d), la longueur à obtenir est de $\frac{3}{2}$ bande. Afin de privilégier une réflexion individuelle, l'expérimentatrice remet respectivement à chacun des trois élèves, une bande de $\frac{1}{6}$ d'unité, une bande de $\frac{1}{8}$ d'unité et une bande de $\frac{1}{12}$ d'unité. La fraction qui indique la mesure par rapport à l'unité est inscrite sur chacune des bandes. L'expérimentatrice a devant elle trois bandes de $\frac{1}{2}$ juxtaposées. Chaque élève doit identifier, à partir de la bande qu'il a devant lui, combien de bandes semblables sont nécessaires pour obtenir $\frac{3}{2}$ bande. La manipulation des bandes est interdite. À tour de rôle, les élèves partagent leur prévision, et les autres élèves disent s'ils sont d'accord ou non et pourquoi. Il y a ensuite validation à l'aide du matériel.

Décontextualisation

À la suite du problème c), où la longueur à obtenir est de 2 bandes, l'expérimentatrice écrit la liste de fractions équivalentes suivantes : $2 = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = \frac{24}{12}$. Les élèves doivent ensuite compléter l'écriture des fractions qui suivent pour prolonger la liste : $a/15$, $b/20$, $50/c$. L'expérimentatrice institutionnalise en précisant que l'on obtient 2 en répétant 12 fois $\frac{1}{6}$, 16 fois $\frac{1}{8}$, etc.

Un exercice de comparaison de fractions est ensuite présenté aux élèves. Il s'agit d'identifier la plus grande fraction parmi les suivantes : $\frac{6}{2}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{9}{3}$ et $\frac{12}{4}$. Des bandes entières, et non des fractions de bandes, sont disponibles. Les élèves qui souhaitent s'appuyer sur les bandes pour comparer ces fractions devront donc effectuer les pliages appropriés. Si aucun élève n'est en mesure d'expliquer l'équivalence des fractions, l'expérimentatrice utilise les bandes pour illustrer l'équivalence des différentes fractions présentées. De plus, l'expérimentatrice amène les élèves à observer que dans chacune des fractions, le numérateur est 3 fois plus grand que le dénominateur. Elle institutionnalise en précisant que lorsque la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur est la même, il s'agit de fractions équivalentes.

Un moment de décontextualisation est également prévu après le problème d), où la longueur à obtenir est de $\frac{3}{2}$ bande. Les élèves doivent compléter le tableau suivant.

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue (en bande-unité)
3	$1/2$	
	$1/6$	
	$1/8$	
	$1/12$	

Le résultat peut s'écrire de plusieurs façons dans la dernière colonne. Les élèves pourraient d'ailleurs soulever ce point en demandant, par exemple, s'il faut écrire $1\frac{1}{2}$ ou $3/2$. L'expérimentatrice demande alors aux autres élèves ce qu'ils en pensent et mentionne que les deux réponses sont bonnes. Si les élèves ne soulèvent pas la question, lorsque le tableau est complété, l'expérimentatrice demande s'il y a d'autres écritures équivalentes. L'expérimentatrice conclut en montrant que pour avoir $1\frac{1}{2}$ bande, on peut répéter 3 fois $1/2$ ($3/2$), 9 fois $1/6$ ($9/6$), etc., et donc que $1\frac{1}{2} = 3/2 = 9/6 = 12/8 = 18/12$.

Ensuite, l'expérimentatrice reprend les bandes, et les élèves doivent compléter les tableaux suivants.

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue (en bande-unité)
5	$1/2$	
	$1/6$	
	$1/8$	
	$1/12$	

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue (en bande-unité)
10	$1/2$	
	$1/6$	
	$1/8$	
	$1/12$	

Si nécessaire, l'expérimentatrice remet les bandes pour que les élèves vérifient leurs réponses.

- Énoncés de problème (sans rétroaction)

Trois problèmes qui s'inscrivent dans des contextes variés sont finalement présentés aux élèves.

Premier problème

Un spectacle dure $1 \frac{3}{4}$ heure.

- a) Si chaque numéro présenté dure $\frac{1}{4}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- b) Si chaque numéro présenté dure $\frac{1}{8}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- c) Si chaque numéro présenté dure $\frac{1}{12}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- d) Si chaque numéro présenté dure $\frac{1}{16}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*

Deuxième problème

Un sac contient $\frac{3}{5}$ kg de farine.

- a) On partage la farine également entre 3 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- b) On partage la farine également entre 6 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- c) On partage la farine également entre 9 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*

Troisième problème

Avec 2 litres d'eau

- a) Peut-on remplir des verres contenant exactement $\frac{1}{3}$ de litre chacun ? Combien ?*
- b) Si l'on transvide l'eau également dans 10 verres, combien de litre(s) contiendra chaque verre ?*
- c) Si l'on transvide l'eau également dans 5 verres, combien de litre(s) contiendra chaque verre ?*

5.2.2.2 Conduites anticipées

Considérant que les deux scénarios mettent en jeu des problèmes de natures différentes, les conduites anticipées sont précisées pour chacun d'eux.

- Scénario 1

Pour exprimer numériquement la mesure d'un segment dessiné sur une feuille à partir d'une bande-unité, quatre conduites sont anticipées.

Conduite A : Plier la bande-unité pour obtenir une « portion » de la bande-unité qui entre n fois dans le segment. Le message est une description des actions de pliage et de reports à effectuer.

Conduite B : Reporter la bande-unité sur le segment autant de fois que possible et évaluer approximativement la mesure de la partie fractionnaire restante du segment. Le message est numérique.

Conduite C : Plier la bande-unité pour identifier la fraction $1/n$ qui entre n fois dans le segment. Le message numérique spécifie la mesure du segment en nombre de reports de $1/n$.

Conduite D : Reporter la bande-unité sur le segment autant de fois que possible, plier la bande-unité pour identifier la mesure de la partie fractionnaire restante du segment. Le message numérique spécifie la mesure du segment en nombre fractionnaire.

Il est possible, pour identifier la mesure de la partie fractionnaire, de plier la bande (en 2, en 3, en 4, etc.) et de mesurer ce qui reste jusqu'à ce que le pliage réalisé permette d'obtenir une mesure précise. Il est aussi possible de mesurer d'abord ce qui reste avec la bande-unité, de marquer ce reste sur la bande-unité et de procéder ensuite au pliage de la bande en suivant le marquage réalisé.

- Scénario 2

Pour obtenir une longueur de bande donnée à partir de la répétition de bande $1/b$, trois conduites sont anticipées.

- Conduite A :* Ne considérer que la relation multiplicative entre $1/b$ et l'entier, interprétant ainsi la longueur à obtenir comme l'entier. Cette interprétation conduit à aller chercher b bandes de $1/b$ unité.
- Conduite B :* Évaluer qualitativement, par une partition « mentale » par exemple, le nombre de fois que $1/b$ entre dans la longueur à obtenir. Cette interprétation conduit à commander le nombre de reports de $1/b$ évalués qualitativement.
- Conduite C :* Établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre $1/b$ et la longueur à obtenir.

5.2.2.3 Justification de la situation

Dans le modèle de Kieren, la fraction en tant que mesure fait référence à la fraction $1/n$ qui, répliquée un certain nombre de fois, donne la mesure d'une grandeur quelconque. Nous avons cependant choisi, dans le scénario 1, de lier fraction et mesure dans un contexte de codages de mesures de grandeurs. Dans de tels contextes, la fraction en tant que mesure est sollicitée si la fraction $1/b$ est convoquée comme sous-unité d'une bande-unité de mesure. Or, d'autres interprétations peuvent également être sollicitées telles que l'interprétation partie/tout, dans le cas d'un segment dont la mesure est inférieure à celle de la bande-unité. Cette interprétation exige cependant une certaine distanciation du contexte puisqu'il faut considérer mentalement le segment à mesurer comme une partie du tout que serait la bande-unité, alors que dans le contexte présenté, le segment a une longueur qui existe indépendamment de la longueur de la bande-unité. Par ailleurs, si un segment mesure plus d'une bande, l'élève peut d'abord identifier le nombre de bandes entières et, ensuite, référer au sens partie/tout pour identifier la mesure de la partie restante. Ainsi, l'interprétation mesure conduirait à une écriture $(nb + a)/b$ (ex. : $5/2$), alors que l'interprétation partie/tout conduirait à une écriture $n + a/b$ (ex. : $2 \frac{1}{2}$). Le scénario 1 conduit d'ailleurs les élèves à confronter ces deux écritures. Dans le scénario 2, les élèves doivent obtenir une longueur de bande donnée à partir de la répétition de $1/b$. Pour construire les deux premières longueurs

(1/2 bande et 3/4 de bande), les relations multiplicatives travaillées au cours de la première situation sont en jeu : $a \times 1/b = c/d$, où b est un multiple de d et où $c < d$. Cependant, à la troisième longueur (2 bandes), c/d correspond à un nombre naturel et, à la quatrième longueur (3/2 bande), $c > d$. Enfin, des énoncés de problème sont finalement présentés de façon à engager un travail d'interprétation des écritures fractionnaires par la résolution de quelques problèmes ne faisant pas appel au contexte de mesurage de bandes. Ces problèmes visent en particulier la décontextualisation des connaissances investies dans les deux scénarios.

5.2.3 Situation sur la fraction en tant que rapport

La troisième situation vise à ce que les élèves mettent en relation deux rapports en adoptant un raisonnement proportionnel. Ainsi, cette situation met en rapport la taille de deux bonshommes exprimée à partir de deux unités de mesure différentes (Lamon, 2008). Le but poursuivi par les élèves est, d'une part, de produire des rapports égaux dans le cadre d'un problème de quatrième proportionnelle et, d'autre part, de comparer des rapports.

5.2.3.1 Scénarios et moments de décontextualisation

Cette situation comporte trois scénarios. Le tableau 5.3 présente les valeurs numériques de chacun des scénarios. Le scénario 1 vise essentiellement l'appropriation de la situation et met donc en jeu des rapports égaux à 1 pour 2 (1 : 2). Ces rapports sont inscrits dans un tableau de manière à dégager, au terme du scénario, le rapport irréductible $t = 2b$ (1 trombone pour 2 boutons) et le rapport inverse, $b = 1/2t$. Une rétroaction pour valider les solutions proposées par les élèves est rendue possible par le mesurage du bonhomme à l'aide d'unités de mesure appropriées (boutons ou trombones). Le scénario 2 est développé sur le rapport 2 : 3 soit, en contexte, $2t$ pour $3b$ (2 trombones pour 3 boutons). Les rapports qui s'en dégagent sont fractionnaires : $t = 3/2b$ et $b = 2/3t$. Pour favoriser le développement du raisonnement proportionnel, cinq questions portant sur la comparaison de rapports sont soumises aux élèves individuellement, et leurs solutions sont ensuite validées par confrontation entre les résultats

numériques et les résultats réels (obtenus grâce à la manipulation du matériel). Le scénario 3 est construit sur le rapport 3 : 4, soit 3 trombones pour 4 boutons. Les rapports qui s'en dégagent sont fractionnaires : $t = 4/3b$ et $b = 3/4t$. La situation se termine par deux énoncés de problème qui portent sur la comparaison de rapports dans un contexte différent, visant ainsi la décontextualisation des connaissances.

Tableau 5.3
Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la troisième situation

Scénario 1	Lili mesure 2 trombones ou 4 boutons rouges. Si Nana mesure 4 trombones, combien de boutons rouges mesure-t-elle ? Si Pompon mesure 10 boutons rouges, combien de trombones mesure-t-il ? Si Jojo mesure 40 boutons rouges, combien de trombones mesure-t-elle ?
Scénario 2	Lili mesure 2 trombones ou 3 boutons verts. Si Nana mesure 4 trombones, combien de boutons verts mesure-t-elle ? Si Tutu mesure 15 boutons verts, combien de trombones mesure-t-il ? Si Jojo mesure 20 trombones, combien de boutons verts mesure-t-elle ? Si Fifo mesure 21 boutons verts, combien de trombones mesure-t-il ?
Scénario 3	Nana mesure 8 boutons rouges ou 6 boutons verts. Si Bobo mesure 12 boutons rouges, combien de boutons verts mesure-t-il ? Si Kiki mesure 15 boutons verts, combien de boutons rouges mesure-t-elle ? Si Lulu mesure 80 boutons rouges, combien de boutons verts mesure-t-il ? Si Doudou mesure 33 boutons verts, combien de boutons rouges mesure-t-il ?

- Scénario 1

Rapport : 1 pour 2

Les unités de mesure :

Longueur du trombone : 4,8 cm

Diamètre du bouton rouge : 2,4 cm

Production de rapports égaux avec validation sur matériel :

2 trombones pour 4 boutons, 4 trombones pour x boutons

2 trombones pour 4 boutons, x trombones pour 10 boutons

Production de rapports égaux sans validation sur matériel :

2 trombones pour 4 boutons, x trombones pour 40 boutons

Tableau de proportionnalité à compléter par les élèves :

	Trombones	Boutons rouges
Lili	2	4
Nana	4	?
Pompon	?	10
Jojo	?	40

Décontextualisation

Une phase d'institutionnalisation est assurée par l'expérimentatrice au terme du scénario de manière à dégager le rapport suivant : il y a 2 boutons pour 1 trombone.

Dans le contexte de la proportionnalité, l'opérateur fonction est un opérateur à unités composées : 2 boutons/trombone et $1/2$ trombone/bouton. Cependant, il est également possible d'interpréter cette situation dans le contexte de la mesure. Il s'agit alors d'utiliser le trombone ou le bouton comme unité de mesure. Nous profitons de cette phase d'institutionnalisation pour établir des relations entre la fraction rapport et la fraction mesure, qui consiste en un rapport unitaire. Les élèves sont ainsi invités à compléter l'énoncé suivant : *Un bouton rouge mesure _____ trombone(s) et un trombone mesure _____ bouton(s) rouge(s).*

- Scénario 2

Rapport : 2 pour 3

Les unités de mesure :

Longueur du trombone : 4,8 cm

Diamètre du bouton vert : 3,2 cm

Production de rapports égaux avec validation sur matériel :

2 trombones pour 3 boutons, 4 trombones pour x boutons

2 trombones pour 3 boutons, x trombones pour 15 boutons

Production de rapports égaux sans validation sur matériel :

2 trombones pour 3 boutons, 20 trombones pour x boutons

2 trombones pour 3 boutons, x trombones pour 21 boutons

Le tableau de proportionnalité à compléter par les élèves :

	Trombones	Boutons verts
Lili	2	3
Nana	4	?
Tutu	?	15
Jojo	20	?
Fifo	?	21

Décontextualisation

Une phase d'institutionnalisation est assurée par l'expérimentatrice au terme du scénario de manière à dégager le rapport suivant : il y a 2 trombones pour 3 boutons verts.

Les élèves doivent compléter l'énoncé suivant : *Un bouton vert mesure _____ trombone(s) et un trombone mesure _____ bouton(s) vert(s).*

De plus, un exercice est proposé aux élèves dans lequel ils doivent non pas identifier une grandeur manquante de façon à former deux rapports équivalents, mais plutôt comparer des rapports. Les élèves doivent ainsi identifier, étant donné le rapport de 2 trombones pour 3 boutons verts, quel bonhomme parmi les suivants est le plus grand :

- a) Un bonhomme qui mesure 5 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 5 trombones ?
- b) Un bonhomme qui mesure 4 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 2 trombones ?
- c) Un bonhomme qui mesure 5 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 4 trombones ?
- d) Un bonhomme qui mesure 9 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 6 trombones ?
- e) Un bonhomme qui mesure 10 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 7 trombones ?

- Scénario 3

Rapport : 3 pour 4

Les unités de mesure :

Diamètre du bouton rouge : 2,4 cm

Diamètre du bouton vert : 3,2 cm

Production de rapports égaux avec validation sur matériel :

8 boutons rouges pour 6 boutons verts⁴⁹, 12 boutons rouges pour x boutons verts

8 boutons rouges pour 6 boutons verts, x boutons rouges pour 15 boutons verts

Production de rapports égaux sans validation sur matériel :

8 boutons rouges pour 6 boutons verts, 80 boutons rouges pour x boutons verts

8 boutons rouges pour 6 boutons verts, x boutons rouges pour 33 boutons verts

Le tableau de proportionnalité à compléter par les élèves :

	Boutons rouges	Boutons verts
Nana	8	6
Bobo	12	?
Kiki	?	15
Lulu	80	?
Doudou	?	33

Décontextualisation

Le scénario 3 se termine par une phase d'institutionnalisation de manière à dégager le rapport suivant : il y a 3 boutons verts pour 4 boutons rouges.

Les élèves doivent compléter l'énoncé suivant : *Un bouton vert mesure _____ bouton(s) rouge(s) et un bouton rouge mesure _____ bouton(s) vert(s).*

⁴⁹ Contrairement au scénario précédent où le rapport irréductible est donné (2 trombones pour 3 boutons verts), dans ce scénario, le rapport irréductible (4 boutons rouges pour 3 boutons verts) n'est pas donné.

- Énoncés de problème (sans rétroaction)

Pour favoriser la décontextualisation des connaissances, deux problèmes de comparaison de rapports qui s'inscrivent dans un contexte différent de la situation de référence sont finalement présentés. Les élèves répondent d'abord de façon individuelle, et il y a ensuite un retour dans lequel les différentes solutions sont confrontées.

Premier problème

À partir des illustrations présentées (voir figure 5.1), les élèves doivent déterminer si ce sont les filles ou les garçons qui recevront le plus de pizza.

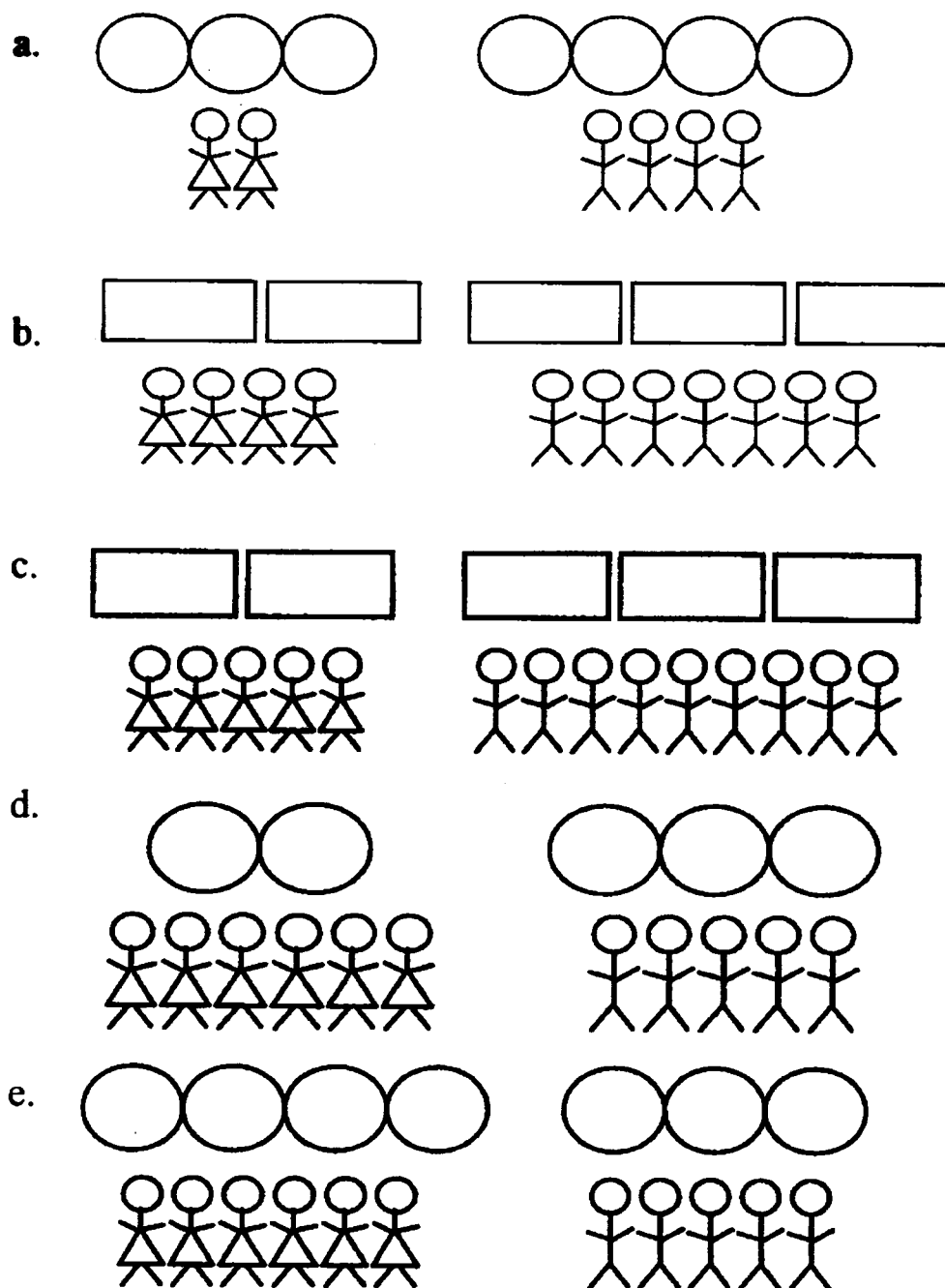


Figure 5.1 : Problème portant sur la comparaison de rapports (tiré de Lamon, 2008)

Deuxième problème

Pour faire de la peinture rose, on mélange de la peinture blanche avec de la peinture rouge. Indique, parmi les mélanges suivants, celui qui permet d'obtenir le rose le plus foncé :

- 5 pots de blanc et 2 pots de rouge ou 5 pots de blanc et 3 pots de rouge ?*
- 5 pots de blanc et 2 pots de rouge ou 4 pots de blanc et 2 pots de rouge ?*
- 4 pots de blanc et 2 pots de rouge ou 6 pots de blanc et 3 pots de rouge ?*
- 3 pots de blanc et 1 pot de rouge ou 5 pots de blanc et 3 pots de rouge ?*
- 6 pots de blanc et 5 pots de rouge ou 3 pots de blanc et 2 pots de rouge ?*
- 9 pots de blanc et 3 pots de rouge ou 6 pots de blanc et 2 pots de rouge ?*

5.2.3.2 Conduites anticipées

Les conduites anticipées sont décrites en s'appuyant sur le schéma de proportionnalité suivant :

	Trombones	Boutons
Bonhomme 1	T1	B1
Bonhomme 2	T2	B2

Conduite A : Mettre en œuvre une stratégie additive fondée sur la différence entre les deux unités de mesure, ce qui conduit à identifier la mesure recherchée en conservant le même écart entre T1 et B1 qu'entre T2 et B2.

Conduite B : Mettre en œuvre une stratégie additive fondée sur la différence à l'intérieur d'une même grandeur, ce qui conduit à identifier la mesure recherchée en conservant le même écart entre T1 et T2 qu'entre B1 et B2.

Conduite C : Évaluer approximativement la mesure, ce qui conduit à estimer le nombre de fois que l'unité de mesure est reportée pour identifier la mesure de la taille du bonhomme (le matériel n'est pas accessible lors de l'anticipation, mais il est connu des élèves).

Conduite D : Procéder à l'itération de chacune des mesures qui composent le rapport, ce qui conduit à identifier la mesure recherchée en procédant au même nombre d'itération pour T1 et B1 jusqu'à l'obtention de la longueur désirée. Cette conduite s'appuie sur le raisonnement suivant : si $T1 = B1$, alors $T1 + T1 + T1 = B1 + B1 + B1$.

Conduite E : Mettre en œuvre une stratégie multiplicative fondée sur la relation « fonction », ce qui conduit à identifier la mesure recherchée en conservant le même rapport entre T1 et B1 qu'entre T2 et B2.

Conduite F : Mettre en œuvre une stratégie multiplicative fondée sur la relation « scalaire », ce qui conduit à identifier la mesure recherchée en conservant le même rapport entre T1 et T2 qu'entre B1 et B2.

5.2.3.3 Justification de la situation

L'égalité entre deux rapports est une entrée sur l'équivalence des fractions qui se distingue de celle qui a été exploitée dans les situations précédentes. Dans ces dernières, l'équivalence pouvait être validée par l'égalité des quantités. En effet, dans la première situation, deux fractions sont équivalentes si elles représentent la même surface d'une figure; dans la deuxième situation, elles sont équivalentes si elles représentent une même longueur. Cependant, dans cette nouvelle situation, l'égalité des rapports ne peut être validée que par un raisonnement proportionnel par lequel une mise en relation est établie entre deux rapports de deux quantités. C'est par le biais de stratégies multiplicatives qu'une telle comparaison peut être effectuée.

5.2.4 Situation sur la fraction en tant que partie d'un tout collection et en tant qu'opérateur

La situation vise à ce que les élèves établissent l'ordre ou l'équivalence entre deux fractions dans le contexte où elles opèrent une transformation sur une même quantité. Dans le scénario 1, le but poursuivi par les élèves est d'identifier, parmi un certain nombre d'opérateurs fractionnaires, ceux qui permettent d'obtenir la même quantité de jetons. Le scénario 2 comporte en revanche un contexte intramathématique. Les élèves doivent choisir, parmi deux opérateurs fractionnaires qui agissent sur un même nombre, celui qui permet d'obtenir le plus grand nombre.

5.2.4.1 Scénarios et moments de décontextualisation

La quatrième situation comporte deux scénarios. Dans le scénario 1, les élèves sont invités à anticiper si un opérateur fractionnaire différent de a/b permet ou non d'obtenir autant de jetons que celui-ci; autrement dit, s'il opère la même transformation que a/b sur la collection initiale. La validation des anticipations est ensuite possible par la manipulation des jetons. Ce déroulement est effectué avec une collection de 40 jetons d'abord et de 60 jetons ensuite. Ce scénario prévoit par ailleurs une institutionnalisation de la décomposition de l'opérateur fractionnaire en deux opérateurs entiers pour calculer a/b de n .

Le scénario 2 vise à ce que les élèves comparent, sans avoir recours à une collection d'objets, des opérateurs fractionnaires liés à de grands nombres. En effet, le nombre affecté par l'opérateur fractionnaire se situe entre 100 et 700. Les fractions à comparer permettent de confronter les élèves à différents cas de figure (ex. : fractions impropres ou non, fractions ayant un numérateur commun, fraction ayant un dénominateur commun, etc.). De plus, la validation n'est plus assurée par la manipulation du matériel mais par l'usage d'une calculatrice; ce qui exige de contrôler les opérations multiplicatives par lesquelles peut être validé le résultat de a/b opérant sur n : $a/b \times n = a \div b \times n = a \times n \div b = n \times a \div b = n \div b \times a$. Le tableau 5.4 présente l'enjeu mathématique des deux scénarios qui composent la quatrième situation.

Tableau 5.4
Enjeu mathématique de chacun des scénarios de la quatrième situation

Scénario 1	<ul style="list-style-type: none"> - Si je prends les 15/20 de 40 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les 3/4 de 40 jetons ? Les 4/5 de 40 jetons ? Les 7/10 de 40 jetons ? - Si je prends les 15/20 de 60 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les 3/4 de 60 jetons ? Les 4/5 de 60 jetons ? Les 7/10 de 60 jetons ?
Scénario 2	<p>Qu'est-ce qui est le plus grand :</p> <ul style="list-style-type: none"> - 11/12 de 396 ou 12/11 de 396 ? - 13/3 de 126 ou 17/3 de 126 ? - 3/4 de 620 ou 3/5 de 620 ? - 2/3 de 414 ou 4/6 de 414 ? - 8/5 de 390 ou 8/6 de 390 ? - 11/13 de 195 ou 13/15 de 195 ? - 18/17 de 136 ou 9/8 de 136 ?

- Activité préalable au scénario 1

Avant de procéder au scénario 1, les élèves sont invités à échanger sur les manières d'obtenir les $\frac{3}{5}$ d'une collection de 30 jetons. Il semble essentiel de s'assurer que les élèves possèdent des stratégies efficaces pour identifier $\frac{a}{b}$ de n , b diviseur de n , en utilisant du matériel puisque dans le scénario 1, c'est la manipulation des jetons qui permet de valider la justesse des prévisions effectuées. Nous faisons l'hypothèse que les stratégies les plus utilisées seront celle du double comptage (pour chaque b objets dans la collection de n objets, prendre a objets) et celle de la partition sens-partage (faire b groupements égaux à partir de la collection de n objets, prendre a de ces groupements). Il est également possible que certains élèves recourent à des stratégies de type numérique.

- Scénario 1

Les valeurs du scénario 1 ont été choisies pour faire échec aux conduites qui ne s'appuient pas sur un raisonnement multiplicatif et pour favoriser une comparaison fondée sur les relations multiplicatives entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions à comparer.

a) 15/20 de 40

Cardinalité de la collection initiale : 40

Opérateur fractionnaire de départ : 15/20

Opérateurs fractionnaires à comparer à 15/20 : 3/4, 4/5, 7/10

Tableau à compléter :

Si je prends les 15/20 de 40 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les :

	Anticipation	Vérification
3/4 de 40 jetons		
4/5 de 40 jetons		
7/10 de 40 jetons		

Les élèves, ensemble, sont invités à anticiper si oui ou non, prendre 3/4, 4/5 et 7/10 de 40 jetons permet d'obtenir le même nombre de jetons que prendre 15/20 de 40. Cette anticipation précède l'identification du nombre de jetons correspondant à 15/20 de 40. Dans le cas où les élèves anticipent que le résultat ne sera pas le même qu'avec 15/20, l'expérimentatrice les invite à préciser si le résultat sera plus grand ou plus petit.

b) 15/20 de 60

Cardinalité de la collection initiale : 60

Opérateur fractionnaire de départ : 15/20

Opérateurs fractionnaires à comparer à 15/20 : 3/4, 4/5, 7/10

Tableau à compléter :

Si je prends les 15/20 de 60 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les :

	Anticipation	Vérification
3/4 de 60 jetons		
4/5 de 60 jetons		
7/10 de 60 jetons		

La phase d'institutionnalisation suivant ce premier scénario permet de déclarer que 15/20 et 3/4 sont deux fractions équivalentes puisqu'elles produisent le même effet sur un même nombre. Autrement dit, $\text{faire} \div 20 \times 15$ est équivalent à $\text{faire} \div 4 \times 3$.

- Scénario 2

Afin de favoriser la comparaison des fractions, les nombres sur lesquels agissent les opérateurs fractionnaires ont été choisis pour éviter l'application de stratégies de calcul mental qui permettent d'identifier le résultat de chaque opération.

Cardinalité des collections initiales : entre 100 et 700

Opérateurs fractionnaires à comparer :

Fraction et son inverse multiplicatif : 11/12 et 12/11

Fractions impropres avec dénominateurs communs : 13/3 et 17/3

Fractions impropres ou non avec numérateurs communs : 3/4 et 3/5; 8/6 et 8/5

Fractions impropres ou non dont la différence entre le numérateur et le dénominateur est la même : 11/13 et 13/15; 18/17 et 9/8

Fractions équivalentes : 2/3 et 4/6

Tableau à compléter :

Qu'est-ce qui est le plus grand ?	Anticipation (A ou B ?)	Résultats	
		A	B
A : 11/12 de 396 B : 12/11 de 396			
A : 13/3 de 126 B : 17/3 de 126			
A : 3/4 de 620 B : 3/5 de 620			
A : 2/3 de 414 B : 4/6 de 414			
A : 8/5 de 390 B : 8/6 de 390			
A : 11/13 de 195 B : 13/15 de 195			
A : 18/17 de 136 B : 9/8 de 136			

Les élèves anticipent d'abord le résultat de façon individuelle, et les différentes prévisions sont confrontées. Une calculette leur est ensuite remise afin qu'ils trouvent les résultats en A et en B et qu'ils puissent ainsi vérifier leurs prévisions.

La phase d'institutionnalisation suivant ce second scénario porte sur l'efficacité des stratégies de type multiplicatif pour comparer les fractions.

5.2.4.2 Conduites anticipées

Nous anticipons six conduites utilisées par les élèves pour comparer deux opérateurs fractionnaires appliquées à une même collection sans recourir au matériel.

Conduite A : La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $c > a$ et $d > b$. Selon cette conduite, plus le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont grands, plus l'opérateur fractionnaire produit un grand résultat.

Conduite B : La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $d < b$. Selon cette conduite, plus le dénominateur d'une fraction est petit, plus l'opérateur fractionnaire produit un grand résultat, s'appuyant ainsi sur la conception selon laquelle plus un dénominateur est petit, plus les parts du tout qui en découlent sont grandes.

- Conduite C :* Lorsque les fractions sont inférieures à 1, la transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $|d - c| < |b - a|$ et lorsque les fractions sont supérieures à 1, la transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $|c - d| > |a - b|$. Cette conduite repose sur les conceptions suivantes : lorsque les fractions sont inférieures à 1, plus l'écart entre le numérateur et le dénominateur est petit, plus la fraction est grande (ex. : $3/4$ est considérée comme étant une fraction plus grande que $97/100$ puisque $4 - 3 < 100 - 97$) et lorsqu'il s'agit de fractions impropres, plus l'écart entre le numérateur et le dénominateur est grand, plus la fraction est grande (ex. : $100/97$ est considérée comme étant une fraction plus grande que $4/3$ puisque $100 - 97 > 4 - 3$).
- Conduite D :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si la surface obtenue en prélevant c/d d'un tout continu est plus grande que celle obtenue en prélevant a/b de ce même tout.
- Conduite E :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si le rapport exprimé par c/d est plus grand que celui exprimé par a/b . Cette conduite repose sur la comparaison des fractions du point de vue des relations multiplicatives que chaque numérateur entretient avec son dénominateur. Elle permet par exemple de juger que $a/b < c/d$ si, a « entre plus de fois » dans b que c dans d .
- Conduite F :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $cn/d > an/b$. Cette conduite repose sur l'application des deux opérateurs entiers qui composent l'opérateur fractionnaire sur la quantité initiale. La comparaison peut également porter strictement sur les calculs à effectuer : par exemple, dans la comparaison de $17/3$ de 136 et $13/3$ de 136, juger que multiplier par 17 et diviser par 3 est nécessairement plus grand que multiplier par 13 et diviser par 3.

5.2.4.3 Justification de la situation

Dans cette quatrième situation, la fraction est considérée comme un opérateur et devrait ainsi favoriser l'accès au traitement numérique dans la comparaison de fractions. Le choix des opérateurs fractionnaires permet de confronter les élèves à des stratégies de comparaison qui ne sont pas d'ordre multiplicatif. Jumelée à l'interprétation partie/tout, l'interprétation opérateur conduit à interpréter la fraction non pas en tant que quantité, mais en tant que transformation multiplicative d'une collection initiale. Ainsi, deux fractions sont équivalentes si elles opèrent la même transformation sur une même collection. C'est sur ce contexte que cette situation est construite. Cette situation permet, par ailleurs, de dépasser les limites de

l'interprétation partie/tout en introduisant les fractions impropres, lesquelles engendrent alors une augmentation de la cardinalité de la collection initiale.

5.2.5 Conclusion

Enfin, chaque situation s'étend sur une ou tout au plus deux périodes d'une heure. Il s'agit donc de courtes situations, pensées de façon à favoriser l'interaction entre les élèves et le milieu, qui comportent des consignes et des contextes simples de sorte que le travail porte bel et bien sur l'enjeu mathématique et non sur la maîtrise des situations. Les situations ont été choisies de manière à élargir le caractère d'utilité des connaissances sur la fraction et leur ordonnancement a été pensé pour relancer les élèves d'une situation à l'autre. De plus, des exercices et des moments d'institutionnalisation sont prévus au cours des situations pour favoriser la décontextualisation des connaissances.

5.3 Opérationnalisation

Les élèves participant à l'expérimentation sont âgés de 11-12 ans et proviennent de trois classes différentes : deux classes de 6^e année et une classe d'adaptation scolaire. Travailler auprès de trois groupes permet de différencier les phénomènes qui se produisent dans chacun des groupes (qui relèvent hypothétiquement de contraintes propres à la situation) de ceux qui sont particuliers à un seul groupe. Notre recherche étant exploratoire, nous avons choisi de varier la nature de la classe d'origine des élèves (classe ordinaire et classe d'adaptation scolaire) dans le but de faire émerger un maximum de phénomènes.

Nous demandons aux enseignants des classes de 6^e année de nous indiquer les élèves qui, selon eux, éprouvent le plus de difficulté en mathématiques dans leur classe et, si possible, ceux qui éprouvent le plus de difficulté avec la notion fractions. Afin de recruter des élèves dont le profil de connaissances est comparable, nous demandons en revanche à l'enseignant de la classe d'adaptation scolaire de nous indiquer les élèves qui réussissent le mieux en

mathématiques. Pour conforter le choix des enseignants, un questionnaire⁵⁰ portant sur les fractions est soumis à l'ensemble des élèves des trois classes. La sélection des élèves se fait donc essentiellement à partir d'une discussion avec les enseignants, mais également en s'appuyant sur les résultats au questionnaire. Soumettre le questionnaire à l'ensemble des élèves de la classe permet de plus de distinguer les difficultés qui sont spécifiques aux élèves ciblés, des difficultés qui sont rencontrées par l'ensemble des élèves de leur classe.

Trois élèves de chaque classe sont sélectionnés. Les élèves sont suivis en groupe de trois élèves (les élèves provenant d'une même classe sont regroupés). Travailler avec un groupe d'élèves plutôt qu'avec un seul élève nous semble bénéfique à différents égards. D'abord, les interactions entre les élèves peuvent être favorables à l'apprentissage et elles peuvent aider l'orthopédagogue à éviter un « surpilotage ». Un groupe de trois élèves nous paraît assez petit pour suivre l'évolution des différents élèves dans l'action et ainsi les relancer, au besoin, de la façon la plus judicieuse possible. Il nous paraît également propice aux échanges entre élèves. De plus, travailler avec plus d'un élève à la fois s'avère avantageux dans le contexte orthopédagogique, car il y a beaucoup d'élèves en difficulté d'apprentissage et le temps dont disposent les orthopédaugues est limité.

Concernant le déroulement des séances, rappelons que l'expérimentatrice est la chercheuse. Étant donné l'objectif de notre recherche, dont l'enjeu est plus nomothétique que pragmatique, nous souhaitons mettre en place les conditions optimales pour maintenir un rapport étroit entre les contraintes de la situation (par un jeu sur les valeurs des variables didactiques) et les conduites des élèves, et ce, afin de mieux circonscrire les conditions didactiques favorables à une intervention didactique en orthopédagogie. Notons de plus que comme la chercheuse a travaillé comme orthopédagogue, elle agira également selon les contraintes qu'elle connaît et qu'elle a intégrées du service de l'orthopédagogie. Ses interventions seront donc inévitablement teintées de cette expérience.

La séquence s'étale sur huit séances d'environ 45 minutes chacune, et ce, pour chacun des groupes d'élèves. Une neuvième séance est consacrée à la passation du posttest. Chacun des

⁵⁰ Le questionnaire est disponible à l'annexe H. Ce questionnaire sert aussi de prétest et de posttest pour analyser l'évolution des connaissances des élèves suivis.

groupes est rencontré deux fois par semaine, ce qui paraît suffisant pour assurer un certain rythme et pour maintenir une mémoire didactique des événements importants. Les séances se déroulent pendant le temps de classe dans un local de l'école.

5.4 Instrumentation

Cette section porte sur les outils de collecte de données et sur l'approche utilisée pour les analyser.

5.4.1 Collecte des données

Les séances orthopédagogiques sont filmées et transcrites, et les productions des élèves sont conservées. Ceci permet de procéder à une reconstruction fidèle de la séquence d'enseignement avec chacun des groupes d'élèves. Pour compléter ces sources d'informations, nous administrons également un prétest et un posttest⁵¹ (voir annexe H) afin d'analyser l'évolution des connaissances des élèves sur la fraction entre le début et la fin de la séquence d'enseignement. L'objectif ne consistant pas à évaluer l'efficacité de la séquence d'enseignement, l'amélioration ou non des résultats entre le prétest et le posttest est considérée comme une source d'informations pertinente pour l'étude des conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur les fractions. Les questions du test sont regroupées en quatre catégories : 1) les faits multiplicatifs; 2) la relation multiplicative partie/tout de la fraction; 3) la résolution de problèmes impliquant une fraction; 4) la fraction comme nombre. Seule la première question du prétest s'inscrit dans la catégorie sur les faits multiplicatifs. Une minute est accordée pour compléter vingt faits multiplicatifs. La catégorie sur la relation partie/tout est divisée en deux sous-catégories : l'identification d'une fraction à partir de la représentation d'un tout continu ou discret (questions 10, 11 et 15) et l'identification ou la construction d'un tout continu ou discret à partir d'une fraction de ce tout (questions 4, 5, 12 et 13). La catégorie portant sur la résolution de problèmes regroupe les questions 6, 8, 14 et 16. Les questions 6 et 14 sollicitent essentiellement le sens opérateur de la fraction et la question 16, le sens rapport. La question 8 comporte quant à elle cinq

⁵¹ Il s'agit du même test lors du prétest et lors du posttest.

énoncés de problème d'isomorphisme de mesures qui font appel à différents sens de la fraction. Enfin, les questions 2, 3, 7 et 9 impliquent un contexte intramathématique et s'inscrivent dans la quatrième catégorie : la fraction comme nombre. La question 2 porte sur la comparaison de fractions et la question 3, sur les fractions équivalentes. La question 7 concerne quant à elle l'identification du nombre de a/b dans x et la question 9 porte sur l'identification d'une fraction sur une droite numérique.

Considérant qu'un test écrit (le prétest) est insuffisant pour avoir un aperçu des connaissances des élèves, nous procédons également à des entretiens individuels, ce qui permet du coup d'établir un premier contact avec les élèves. Deux périodes de 45 minutes auprès de chaque élève sont prévues pour l'entretien. Le protocole d'entretien, composé de quatre tâches, vise d'abord à identifier les connaissances des élèves sur les codes oraux et écrits des fractions (tâche 1) et sur les structures multiplicatives dans \mathbb{N} (tâches 2 et 3). La quatrième tâche repose sur le traitement de l'égalité $n \times a/b = x$. Des énoncés de problème variés s'appuyant sur cette égalité sont présentés. La construction de ces problèmes s'appuie sur les variantes suivantes : 1) la valeur recherchée (n , a/b ou x); 2) les valeurs numériques ($a = 1$ ou $a \neq 1$, n est multiple de a ou non, $a < b$ ou $a > b$); 3) la structure du problème (problème de proportionnalité ou problème scalaire); 4) le contexte impliqué (gâteaux, litres d'eau, jetons ou longueur de segments).⁵² Le pilotage des entretiens s'inspire de l'entretien didactique d'investigation des connaissances sur la fraction de Giroux (2011). Cet entretien a un caractère dynamique, c'est-à-dire que des relances sont aménagées pour tenter de provoquer des adaptations de connaissances. En ce sens, l'entretien « dépasse » l'idée d'un test écrit qui vise à déterminer l'état des connaissances de l'élève (ce qui est acquis et ce qui ne l'est pas).

5.4.2 Analyse des données

Pour analyser les données recueillies, trois plans d'analyse sont réalisés :

- 1) confrontation des performances des élèves issus des outils de collecte de données pré- et post-expérimentation;

⁵² Le lecteur peut se référer à l'annexe I pour la description de chacune des tâches prévues à l'entretien.

- 2) caractérisation de la progression du savoir de chaque groupe d'élèves pour chaque situation qui compose la séquence d'enseignement;
- 3) validation interne de chacune des situations.

Le premier plan d'analyse, présenté au chapitre VI, porte sur les résultats obtenus avant et après la séquence d'enseignement. Les deux autres plans d'analyse, présentés au chapitre VII, s'intéressent spécifiquement aux quatre situations présentées dans la séquence d'enseignement. Les résultats issus des trois plans d'analyse sont confrontés au chapitre VIII de manière à dégager des hypothèses sur les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la fraction. Notre recherche conduit ainsi à énoncer quelques fondements didactiques relatifs à l'enseignement de la fraction dans un cadre orthopédagogique.

5.4.2.1 Premier plan d'analyse

Le premier plan d'analyse porte sur les résultats issus des outils de collecte de données pré- et post-expérimentation. Concernant les données recueillies avant la séquence d'enseignement, il y a confrontation entre les performances au prétest des élèves sélectionnés et celles des pairs de leur classe. De plus, une confrontation est réalisée entre les performances à l'entretien individuel et celles au prétest, permettant ainsi de dresser un portrait des connaissances sur la fraction de chacun des élèves suivis. Cette analyse se fait par groupe d'élèves provenant de la même classe afin d'observer le niveau de connaissances, d'une part, entre les groupes d'élèves (est-ce qu'un groupe semble considérablement plus fort ou plus faible que les autres ?) et, d'autre part, au sein d'un même groupe (est-ce que les élèves d'un même groupe semblent approximativement du même niveau ?). Le premier plan d'analyse vise aussi à confronter les résultats obtenus au prétest et ceux obtenus au posttest de façon à examiner l'effet de la séquence sur les performances des élèves à un test écrit. Cette analyse est effectuée essentiellement en fonction des quatre catégories de questions présentées précédemment. La figure 5.2 illustre les différentes confrontations réalisées au cours du premier plan d'analyse.

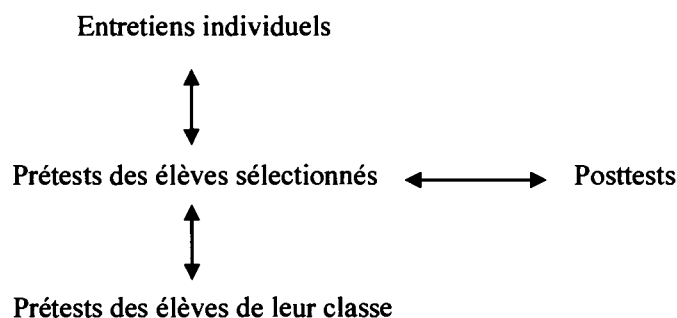


Figure 5.2 : Confrontations réalisées selon le premier plan d'analyse

5.4.2.2 Deuxième plan d'analyse

La deuxième analyse, qui porte sur la séquence d'enseignement, vise à caractériser la progression du savoir en jeu (les fractions) pour chacun des groupes. Ainsi, pour chacune des situations de la séquence, un tableau présentant les activités réalisées auprès des trois groupes d'élèves est exposé. Ce plan d'analyse conduit à une première réduction des données. Les activités réalisées dans chacun des groupes sont comparées, permettant ainsi d'observer les convergences et les divergences entre les trois groupes. Ce plan d'analyse vise par ailleurs à relever les changements apportés à chacune des situations et à identifier en fonction de quelles contraintes (de temps, de difficultés, etc.) ces changements sont apparus nécessaires. Le troisième plan d'analyse permettra d'observer si les changements apportés témoignent d'une avancée pour les élèves dans l'acquisition des connaissances.

5.4.2.3 Troisième plan d'analyse

La troisième analyse vise la validation interne de chacune des situations. Pour ce faire, nous procédons à la confrontation d'analyses *a priori/a posteriori* des stratégies et connaissances engagées par les élèves ainsi qu'à la caractérisation des interactions didactiques. Ces deux éléments nous paraissent indissociables, car d'une part, les stratégies des élèves relèvent non seulement des caractéristiques des tâches, mais également des interactions didactiques et

d'autre part, il semble indispensable de tenir compte des caractéristiques des tâches dans l'analyse des interactions didactiques.

La confrontation d'analyses *a priori/a posteriori* des stratégies et connaissances engagées par les élèves est conforme à la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988, 1996, 2002)⁵³. Ainsi sont comparées les conduites adoptées par chacun des élèves au cours des quatre situations aux conduites anticipées. Rappelons cependant que l'objectif de notre recherche ne consiste pas à valider une séquence d'enseignement, mais bien à étudier les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la fraction. La séquence élaborée est le cadre de référence sur lequel nous nous appuyons pour étudier ces conditions. Ainsi, la confrontation des analyses *a priori/a posteriori* permet de juger si les situations présentées aux élèves ont permis l'élaboration des stratégies faisant appel aux connaissances sur la fraction visées, mais ces résultats seront liés aux conditions didactiques qui ont servi d'assise aux situations.

Par ailleurs, il paraît essentiel de porter une attention particulière aux interactions didactiques. Les interventions clés et les moments sensibles sont exposés et finement analysés. Cette analyse est très importante, car elle touche particulièrement la spécificité de l'intervention orthopédagogique. En effet, l'analyse des interactions didactiques est précieuse pour repérer des phénomènes qui relèvent de contraintes qui pèsent sur l'enseignement en contexte orthopédagogique et pour identifier, s'il y a lieu, les interventions de l'orthopédagogue pour tenter de les réguler. C'est en somme la nature du contrat didactique qui est finement analysée dans le déroulement des séances pour chacun des groupes, de façon à cerner si les contraintes spécifiques à l'orthopédagogie ont permis de maintenir les conditions didactiques prévues (par exemple, la dévolution) ou si elles ont généré des transformations qui les ont affectées. Précisons, par ailleurs, que l'analyse est chronologique à l'intérieur d'une même situation, et chronologique également d'une situation à l'autre. L'importance de certains éléments se révèle ainsi par leur répétition au fur et à mesure de l'analyse.

⁵³ L'ingénierie didactique est une méthodologie de recherche à l'appui de la TSD. Elle permet d'analyser les processus de transformation et de production des connaissances ainsi que leur adéquation au savoir en jeu, et ce, en tenant compte des interactions entre l'enseignant et les élèves à propos du savoir.

5.5 Démarche éthique

Étant donné que notre étude s'inscrit dans le projet de recherche, mené par la professeure J. Giroux, intitulé « Enseignement/apprentissage des fractions et difficultés d'apprentissage », nous bénéficions de la certification éthique de ce projet, numéro 591032, émise par le CIERH de l'UQAM. Dans le respect des règles éthiques, un formulaire de consentement dans lequel est expliqué l'objectif de la recherche est remis aux parents de chacun des élèves afin de s'assurer de leur accord (voir annexe J). Par ce formulaire, la chercheuse obtient à la fois le consentement des parents pour qu'un questionnaire portant sur les fractions soit soumis à leur enfant, et leur accord, si leur enfant est sélectionné, pour que celui-ci participe à un entretien individuel et à des séances de travail en petits groupes sur le thème des fractions. La possibilité de retirer leur enfant du projet en tout temps est bien sûr mentionnée. Nous nous assurons également, à l'oral, de la participation volontaire de chacun des élèves. Les parents sont aussi informés des mesures prises pour assurer la confidentialité des données et la diffusion des résultats. À chaque élève est attribué un numéro pour le traitement et la diffusion des résultats. Les données sont conservées par la chercheuse dans un endroit sécurisé et seront détruites cinq ans après la diffusion des résultats.

Le suivi devrait permettre aux élèves de développer leurs connaissances sur les fractions. Comme les séances ont lieu pendant le temps de classe, pour éviter que l'absence des élèves provoque un retard important dans une matière, il y a rotation des matières manquées et les moments des séances sont choisis en collaboration avec l'enseignant.

CHAPITRE VI

PROFIL DE PERFORMANCES DES ÉLÈVES

AVANT ET APRÈS LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Le chapitre VI se rapporte au premier plan d'analyse qui consiste à confronter les performances des élèves à partir des différents outils de collecte de données pré- et post-expérimentation. Nous exposons les performances des élèves sélectionnés au prétest écrit sur la fraction au regard de la performance de leur groupe-classe d'appartenance ainsi que leur performance à l'entretien individuel. Nous confrontons ensuite les résultats au prétest et à l'entretien afin de cerner le profil de chacun des trois groupes d'élèves participant à l'expérimentation. Le chapitre se clôt sur la comparaison entre les résultats des élèves sélectionnés au prétest et au posttest de manière à juger de l'impact de la séquence d'intervention orthopédagogique sur les performances à un test écrit.

6.1 Performances des élèves au prétest sur la fraction

Dans cette section sont présentées les performances des élèves au test écrit sur la fraction. L'analyse vise principalement à situer le profil des neuf élèves sélectionnés en regard du profil du groupe-classe auquel ils appartiennent. Rappelons que les questions du prétest sont regroupées en quatre catégories : 1) les faits multiplicatifs; 2) la relation multiplicative partie/tout de la fraction; 3) la résolution de problèmes impliquant une fraction; 4) la fraction comme nombre. Le tableau 6.1 dresse un portrait général des performances des élèves sélectionnés et de celles de leur groupe-classe pour chacune des catégories de questions. Afin d'alléger la lecture, nous utilisons les sigles OR1 et OR2 pour identifier les deux classes ordinaires de 6^e année, et le sigle AS pour identifier la classe d'adaptation scolaire.

Tableau 6.1
Pourcentage⁵⁴ de réussite des élèves aux questions du prétest
en fonction des catégories établies

Catégories	Questions	OR1		OR2		AS	
		Élèves de la classe (%)	Élèves sélectionnés (%)	Élèves de la classe (%)	Élèves sélectionnés (%)	Élèves de la classe (%)	Élèves sélectionnés (%)
Faits mult.	1 ⁵⁵	100	100	92	67	8	0
Relation partie/tout	4	65	33	72	33	42	0
	5	70	0	68	33	25	0
	10	100	100	100	100	25	33
	11	83	33	100	100	17	0
	12	83	33	100	100	17	33
	13	57	0	76	0	8	33
	15 ⁵⁶	100	100	100	100	50	100
Résolution de problèmes	6	70	0	84	67	8	0
	8a	83	33	92	67	17	33
	8b	91	33	96	67	8	0
	8c	87	0	100	100	17	33
	8d	65	0	56	33	0	0
	8e	65	33	56	67	0	0
	14	74	0	84	67	0	0
	16a ⁵⁷	57	33	40	33	33	33
	16b	30	0	20	0	0	0
Fraction comme nombre	2 ⁵⁸	74	48	79	59	53	41
	3a	83	33	92	67	0	0
	3b	74	67	76	0	0	0
	3c	39	0	24	0	0	0
	7 ⁵⁹	70	13	74	40	22	27
	9	17	0	24	0	0	0

⁵⁴ Notons que la transformation en pourcentages sur un effectif aussi petit que trois (pour les élèves sélectionnés) n'est utilisée que pour faciliter la comparaison avec le taux de réussite du groupe d'appartenance. Notons également que les pourcentages sont arrondis à l'unité.

⁵⁵ Une réussite est considérée lorsque 14 faits ou plus sont réussis.

⁵⁶ Une réussite est considérée lorsque l'élève obtient une réponse juste pour au moins cinq des sept représentations.

⁵⁷ Pour les questions 16a et 16b, une réussite est considérée même si l'élève n'est pas en mesure de justifier son choix.

⁵⁸ La question 2 présente neuf comparaisons de fractions. La moyenne de réussite aux neuf comparaisons est présentée.

⁵⁹ La question 7 présente cinq questions. La moyenne de réussite aux cinq questions est présentée.

Dans la classe OR1, les trois élèves ayant obtenu les plus faibles résultats au questionnaire sur la fraction font partie des cinq élèves suggérés par leur enseignante (E1, E2 et E3)⁶⁰. Il y a effectivement un écart important entre les performances du groupe-classe et celles des trois élèves sélectionnés, et ce, pour chacune des catégories de questions à l'exception des faits multiplicatifs qui sont bien réussis par l'ensemble des élèves. Parmi les trois élèves ciblés par l'enseignante de la classe OR2, deux élèves (E4, E5) obtiennent de faibles résultats et une élève obtient un résultat moyen (E6) en regard de son groupe-classe. Le jugement de l'enseignante, à l'effet que cette élève éprouve des difficultés importantes, a été déterminant pour sa sélection. Enfin, dans la classe AS, l'enseignante mentionne que l'ensemble des élèves de sa classe ont des difficultés avec la notion de fraction et nous suggère les trois élèves qui lui semblent les plus forts en mathématiques. Les élèves ciblés par l'enseignante (E7, E8, E9) obtiennent de faibles résultats au questionnaire à l'image de l'ensemble de leur groupe-classe.

6.1.1 Les faits multiplicatifs

Seule la première question du prétest s'inscrit dans cette catégorie. Vingt faits multiplicatifs doivent être complétés à l'écrit en l'espace d'une minute⁶¹. Les élèves des groupes OR connaissent beaucoup mieux les faits multiplicatifs que ceux du groupe AS. En effet, la valeur du groupe médian dans les deux groupes OR est de 19 items réussis sur 20, alors que dans le groupe AS, elle est de 4 items réussis sur 20. Dans le groupe OR1, les élèves E2 et E3 réussissent les 20 faits multiplicatifs, comme 10 des 23 élèves de leur groupe. L'élève E1 est cependant celui qui affiche le plus faible résultat de sa classe, en complétant correctement 14 des 20 items. Dans le groupe OR2, tout comme 10 des 25 élèves de sa classe, l'élève E6 réussit les 20 faits multiplicatifs. L'élève E4 complète correctement 7 items et l'élève E5, 15, se situant ainsi toutes les deux parmi les plus faibles résultats de leur classe. Dans le groupe AS, à l'image des élèves de leur classe, les trois élèves sélectionnés connaissent peu de faits multiplicatifs : E9 en réussit deux, E7 en réussit quatre et E8, six.

⁶⁰ Rappelons que la sélection de trois élèves faibles dans les classes ordinaires (OR1 et OR2) et de trois élèves forts dans la classe d'adaptation scolaire (AS) se fait principalement sur la recommandation des enseignants, mais que le prétest a servi à confirmer leurs choix.

⁶¹ Un tableau présentant les réponses des élèves en fonction de leur classe d'appartenance est disponible à l'annexe K.

6.1.2 *La relation multiplicative partie/tout*

Sous cette catégorie sont regroupées les questions relatives à l'identification d'une fraction à partir de la représentation d'un tout continu ou discret (questions 10, 11 et 15). Nous associons également à cette catégorie l'identification ou la construction d'un tout continu ou discret à partir d'une fraction de ce tout (questions 4, 5, 12 et 13).

6.1.2.1 Identification d'une fraction d'un tout

Aux questions 10 et 11, a/b de n jetons doit être noirci. À la question 10, n est multiple de b (1/5 de 10 jetons). L'ensemble des élèves des deux classes ordinaires réussit cette tâche y compris, donc, les élèves sélectionnés. Dans la classe AS, 3 des 12 élèves (25 %) réussissent la question, dont E7. Les élèves E8 et E9 noircissent un seul jeton, suggérant une stratégie de double comptage de premier niveau, c'est-à-dire qu'ils ont sans doute identifié 1/5 de 5 jetons. Les élèves sélectionnés obtiennent donc des résultats comparables à ceux des élèves de leur classe. À la question 11, b est multiple de n (4/10 de 5 jetons). Dans la classe OR1, 19 des 23 élèves (83 %) fournissent la solution attendue, dont E2. Dans la classe OR2, tous les élèves réussissent, y compris donc les trois élèves sélectionnés. Dans la classe AS, seulement 2 des 12 élèves (17 %) réussissent, dont E7. Les quatre élèves sélectionnés qui ne réussissent pas la tâche, soit E1 et E3 du groupe OR1 et E8 et E9 du groupe AS, noircissent un nombre de jetons équivalent au numérateur de la fraction, soit 4.

À la question 15 du prétest, les élèves doivent identifier parmi sept représentations dessinées celles qui correspondent à $1/4$ ⁶². Dans les deux classes de 6^e année, l'ensemble des élèves obtiennent la réponse juste pour au moins cinq des sept représentations, alors que dans la classe AS, la moitié des élèves réussissent cinq items ou plus. Chacun des neuf élèves sélectionnés répond avec succès à cinq représentations ou plus. Les erreurs varient en fonction des groupes. Les trois élèves sélectionnés dans le groupe OR1 et l'élève E4 de OR2 éprouvent des difficultés à reconnaître que $1/4$ d'un tout continu est prélevé lorsque le tout n'est pas divisé en quatre parties (représentations E et F). En revanche, les élèves E8 et E9 du groupe AS éprouvent des difficultés dans l'identification de fraction sur des tous discrets, ne

⁶² À l'annexe L est exposé un tableau présentant les réponses des élèves en fonction de leur classe d'appartenance pour chacun des items de la question 15.

reconnaissant pas qu'il s'agit d'une représentation de $\frac{1}{4}$ lorsque deux cercles sur huit sont coloriés (représentation G).

6.1.2.2 Identification ou construction du tout à partir d'une fraction de ce tout

Aux questions 4 et 5, les élèves doivent identifier, parmi trois tous continus, celui dont est issue une représentation de ses $\frac{2}{3}$. À la question 4, le tout est un rectangle, alors qu'à la question 5, le tout est un segment. Entre 64 % et 73 % des élèves des classes ordinaires réussissent ces deux questions. Plus précisément, parmi les 23 élèves de la classe OR1, 15 (65 %) réussissent la question 4 et 16 (70 %), la question 5. Dans la classe OR2 (25 élèves), 18 élèves (72 %) réussissent la question 4 et 17 (68 %), la question 5. Cependant, chez les élèves sélectionnés de ces classes, la question 4 n'est réussie que par E2 (OR1) et E4 (OR2) et seule E4 réussit la question 5. Parmi les 12 élèves de la classe AS, 5 d'entre eux (42 %) réussissent la question 4 et 3 (25 %), la question 5. Aucun des élèves sélectionnés de ce groupe ne réussit les questions 4 ou 5. Ainsi, dans les classes ordinaires, les élèves sélectionnés réussissent peu ces deux questions alors que les $\frac{2}{3}$ des élèves de leur classe y arrivent. Dans la classe AS, le taux de réussite est considérablement moins élevé que dans les classes ordinaires, et les performances des élèves sélectionnés ne se distinguent pas de celles de leur groupe-classe.

Les questions 12 et 13 impliquent un tout discret. À la question 12, un jeton représente $\frac{1}{5}$ d'une collection et à la question 13, 6 jetons représentent $\frac{3}{5}$ de la collection. Les élèves doivent identifier le nombre de jetons de la collection complète. Dans la classe OR1, 19 des 23 élèves (83 %) réussissent la question 12, incluant un seul élève sélectionné (E3), et seulement 13 des 23 élèves (57 %) réussissent la question 13, dont aucun des élèves sélectionnés. Dans la classe OR2, tous les élèves réussissent la question 12 et 19 des 25 élèves (76 %) réussissent la question 13. Les trois élèves sélectionnés réussissent la question 12 mais échouent la question 13. Dans la classe AS, seulement 2 des 12 élèves (12 %), dont E7, réussissent la question 12, et E7 est le seul élève de la classe à réussir la question 13. Cette question, réussie par un seul des neuf élèves sélectionnés (E7), exige de coordonner deux opérations successives pour trouver d'abord la valeur de $\frac{1}{5}$ (2 jetons) et, ensuite, celle de $\frac{5}{5}$ (10 jetons).

En somme, les questions portant sur la relation multiplicative partie/tout sont réussies par la grande majorité des élèves des classes ordinaires, mais échouées par la majorité des élèves de la classe d'adaptation scolaire. Parmi les élèves sélectionnés pour le suivi, les élèves ayant le mieux performé sont ceux du groupe OR2. Les trois élèves de ce groupe réussissent la majorité des questions, ce qui est uniquement le cas de l'élève E2 dans OR1. Les élèves dont les performances sont les plus faibles concernant cette catégorie de questions sont les élèves E8 et E9 du groupe AS. Ils échouent toutes les questions à l'exception de la question 15, dans laquelle ils reconnaissent 5 des 7 représentations de $1/4$. L'élève E7, quant à lui, présente un profil de connaissances comparable à ceux des élèves sélectionnés dans le groupe OR2.

6.1.3 La résolution de problèmes

Les questions 6, 8, 14 et 16 du prétest présentent des énoncés de problème. Les questions 6 et 14 sollicitent essentiellement l'interprétation de la fraction en tant qu'opérateur. À la question 8, cinq énoncés de problème d'isomorphisme de mesures sont présentés. Les interprétations de la fraction qui y sont sollicitées varient en fonction des énoncés. Quant à la question 16, elle fait appel à l'interprétation de la fraction en tant que rapport.

6.1.3.1 Problème de type scalaire

Les questions 6 et 14, qui sollicitent le sens opérateur de la fraction, présentent un énoncé de problème de type scalaire impliquant une relation indirecte. Ces énoncés portent sur la recherche de la valeur d'un tout étant donné une partie de ce tout et une relation fractionnaire.

Question 6 : *Le $1/3$ d'une ficelle mesure 6 cm. Quelle est la longueur de la ficelle entière ?*

Question 14 : *Émilie a 4 \$. Ce montant correspond aux $2/3$ du montant d'argent que possède son frère. Combien d'argent son frère possède-t-il ?*

La majorité des élèves des classes OR réussit ces questions, ce qui n'est cependant pas le cas des élèves de la classe AS. En effet, les taux de réussite, pour la classe OR1, sont de 70 % ($16/23$) à la question 6 et de 74 % ($17/23$) à la question 14 et, pour la classe OR2, de 84 % ($21/25$) pour les deux questions. Dans la classe AS, un seul des 12 élèves réussit la question 6

et aucun ne réussit la question 14. Parmi les élèves sélectionnés, E4 et E6 réussissent les deux questions et les autres élèves les échouent. Les résultats des élèves sélectionnés concordent avec ceux des élèves de leur groupe-classe, dans la mesure où la classe qui affiche le meilleur taux de réussite, soit OR2, est aussi celle qui compte les deux seules élèves sélectionnées qui réussissent aux questions 6 et 14.

6.1.3.2 Problèmes d'isomorphisme de mesures

La question 8 présente cinq problèmes d'isomorphisme de mesures.

- a) *Il y a 6 enfants à une fête. On donne à chacun des enfants $\frac{1}{3}$ d'une barre de granola. Combien de barres de granola entières donne-t-on ?*
- b) *Chaque jour, je marche $\frac{1}{6}$ km. Combien de jours cela me prendra pour marcher 1 km ?*
- c) *On a 2 longues réglisses. On donne $\frac{1}{4}$ de réglisse à chaque enfant. À combien d'enfants peut-on donner de la réglisse ?*
- d) *Combien de petits contenants de $\frac{1}{6}$ de litre faut-il pour remplir un contenant de $\frac{2}{3}$ de litre ?*
- e) *Il y a 3 pots pleins de jus dans le réfrigérateur. Je les transvide dans 4 pots de manière à ce que chacun ait la même quantité de jus. Quelle fraction de chaque pot est remplie de jus ? (3 pots remplis de jus sont dessinés et en dessous, 4 pots vides semblables sont dessinés.) a) Indique par une marque sur chaque pot blanc, la quantité de jus qu'il y aura; b) écris la fraction que cette quantité représente.*

L'énoncé a) correspond à un problème de multiplication, les énoncés b), c) et d) correspondent à un problème de division regroupement et l'énoncé e), à un problème de division partage. Les taux de réussite aux énoncés a), b) et c) dans les classes OR1 et OR2 sont tous supérieurs à 80 %. Aux énoncés d) et e), les taux de réussite sont de 65 % dans la classe OR1 et de 56 % dans la classe OR2. Si les taux de réussite dans ces deux classes sont comparables, ceux de leurs élèves sélectionnés diffèrent. Ainsi, les trois élèves sélectionnés dans la classe OR1 ne réussissent pas à solutionner la majorité des problèmes, alors que deux élèves de la classe OR2 (E4 et E6) réussissent quatre des cinq énoncés. Dans la classe AS, bien qu'ils ne réussissent qu'un seul énoncé, les élèves E7 et E9 se distinguent en faisant partie des très rares élèves de cette classe qui réussissent un énoncé. Enfin, chez les élèves sélectionnés, l'énoncé d), qui consiste en un problème de division partage, est le plus échoué.

6.1.3.3 Problème sollicitant l'interprétation de la fraction en tant que rapport

La question 16 du prétest sollicite l'interprétation de la fraction en tant que rapport.

Léo doit piger une bille dans l'un des sacs suivants :

Dans le sac A, il y a 5 billes bleues et 6 billes rouges.

Dans le sac B, il y a 5 billes bleues et 9 billes rouges.

Dans le sac C, il y a 8 billes bleues et 9 billes rouges.

Dans le sac D, il y a 8 billes bleues et 12 billes rouges.

- a) *Dans quel sac Léo doit-il piger pour avoir le plus de chances de tirer une bille bleue ? Pourquoi ?*
- b) *Dans quel sac Léo doit-il piger pour avoir le plus de chances de tirer une bille rouge ? Pourquoi ?*

Bien qu'une réussite soit considérée même si l'élève n'est pas en mesure de justifier son choix, les taux de réussite sont peu élevés à cette question. À l'item a), ces taux sont les suivants : 1) 57 % dans la classe OR1; 2) 40 % dans la classe OR2; 3) 33 % dans la classe AS. Parmi les élèves sélectionnés, un élève de chacune des classes obtient une réussite, soit E2, E6 et E7. Le taux de réussite à l'item b) est plus faible que celui de l'item précédent : 1) 30 % dans la classe OR1 ; 2) 20 % dans la classe OR2 ; 3) 0 % dans la classe AS. Les neuf élèves sélectionnés considèrent que le sac D est celui dans lequel on a le plus chances de piger une bille rouge, sans doute parce qu'il s'agit du sac dans lequel il y a le plus de billes rouges. Il s'agit également de la réponse la plus fréquente dans chacune des classes. Ainsi, les connaissances des élèves sélectionnés ne leur permettent pas de traiter la fraction en tant que rapport, telle que présentée à la question 16. Il semble cependant important de souligner que cette question est relativement complexe en raison, d'une part, du choix des nombres et, d'autre part, du nombre de rapports à comparer.

En somme, à l'exception de la question 16, les questions portant sur la résolution de problèmes sont réussies par la majorité des élèves des classes ordinaires, mais échouées par la grande majorité et parfois même l'ensemble des élèves de la classe d'adaptation scolaire. Parmi les élèves sélectionnés, seules les élèves E4 et E6 de OR2 réussissent la majorité des

problèmes. En effet, parmi les neuf énoncés de problème s'inscrivant dans cette catégorie⁶³, E4 et E6 en réussissent respectivement six et cinq, tandis que les autres élèves en réussissent deux ou moins.

6.1.4 La fraction comme nombre

La fraction comme nombre concerne les questions qui s'inscrivent dans un contexte intramathématique. Cette catégorie regroupe les questions 2, 3, 7 et 9. La question 2 porte sur la comparaison de fractions, la question 3 concerne les fractions équivalentes et la question 9, l'identification d'une fraction sur une droite numérique. À la question 7, il s'agit d'identifier combien il y a de a/b dans x .

6.1.4.1 Comparaison de fractions

Dans les deux classes ordinaires, la grande majorité des élèves compare correctement deux fractions⁶⁴, lorsque : 1) les fractions sont des inverses multiplicatifs; 2) les fractions ont un numérateur commun; 3) les fractions ont un dénominateur commun. En effet, les taux de réussite à ces types de comparaison sont supérieurs à 75 % dans les deux classes. Aux deux items où la paire de fractions à comparer présente la même différence entre le numérateur et le dénominateur, les taux de réussite chutent. Ils sont de 30 % et 26 % dans OR1 et de 52 % et 40 % dans OR2. Concernant les six élèves sélectionnés dans les classes de 6^e année, E3 et E6 réussissent sept comparaisons sur neuf et leur profil de réponses se comporte à l'image globale de leur groupe-classe, c'est-à-dire que leurs erreurs concernent les comparaisons pour lesquelles l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même. L'élève E4 réussit six comparaisons de fractions, et les élèves E1, E2 et E5 en réussissent trois de compositions variées.

⁶³ Quatre questions s'inscrivent dans la catégorie portant sur la résolution de problème, mais neuf énoncés de problème sont présentés puisque les questions 5 et 8 en impliquent plus d'un.

⁶⁴ Le lecteur peut se référer à l'annexe M pour connaître les taux de réussite en fonction des classes de chacune des comparaisons de fractions présentées à la question 2 du prétest.

Dans la classe AS, les taux de réussite varient entre 33 % et 67 %. Les comparaisons les mieux réussies sont celles dont les fractions ont un dénominateur commun et, contrairement aux résultats des classes OR1 et OR2, celles dont l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même. Il est possible cependant que cette réussite ne repose pas sur la comparaison de la relation qu'entretiennent les termes à l'intérieur de chaque fraction. En effet, la fraction qui présente les plus grands termes correspond à la plus grande des deux fractions (par exemple, $16/17 > 4/5$ tout comme $16 > 4$ et $17 > 5$). Les comparaisons les moins réussies sont celles dont les fractions ont un numérateur commun. Les élèves sélectionnés, E7 et E8, comparent correctement les fractions ayant un numérateur commun, comparaison échouée par la majorité des élèves de leur classe. En revanche, E9, à l'image de son groupe-classe, compare avec succès les fractions dont les termes présentent une même différence ainsi que celles qui possèdent un dénominateur commun. Il est ainsi possible qu'elle interprète que plus les termes dans une fraction sont grands, plus la fraction est grande.

6.1.4.2 Fractions équivalentes

À la question 3 du prétest⁶⁵, il convient d'identifier :

- a) *parmi les fractions 3/9, 7/9, 4/12 et 3/5, celles qui sont équivalentes à 1/3;*
- b) *parmi les fractions 6/15, 4/10, 3/6 et 7/10, celles qui sont équivalentes à 2/5;*
- c) *parmi les nombres 2/4, 2, 10/5, 8/4 et 8/6, ceux qui sont équivalents à 4/2.*

Dans les deux classes de 6^e année, plus de 70 % des élèves sont en mesure d'identifier l'équivalence de deux fractions lorsque les termes des fractions entretiennent une relation multiplicative entière entre eux⁶⁶. Lorsque les termes des fractions équivalentes n'entretiennent pas de relation multiplicative entière entre eux (comme c'est le cas pour 4/2 et 10/5), seulement 39 % de OR1 et 32 % de OR2 établissent l'équivalence. À l'image de leur groupe-classe, les élèves E2, E3, E4 et E6 considèrent uniquement équivalentes des fractions

⁶⁵ L'annexe N présente un tableau dans lequel sont affichés les taux de réussite en fonction des classes pour chacun des items de la question 3.

⁶⁶ Lorsque les termes de deux fractions entretiennent une relation multiplicative entière entre eux, le numérateur et le dénominateur de l'une des fractions sont respectivement multiples du numérateur et du dénominateur de la seconde fraction.

dont les termes entretiennent une relation multiplicative entière. Par ailleurs, aucun des élèves sélectionnés dans OR1 ou OR2 n'est en mesure d'établir l'équivalence entre $\frac{4}{2}$ et 2, ce qui est pourtant réalisé par plusieurs élèves de leur groupe-classe (83 % des élèves de OR1 et 64 % des élèves de OR2). Notons également qu'il arrive aux élèves E1 et E5 de considérer équivalentes des fractions qui présentent le même écart entre le numérateur et le dénominateur. L'élève E1 est le seul parmi les élèves sélectionnés des groupes OR à considérer équivalentes des fractions qui sont des inverses multiplicatifs.

Concernant la classe AS, aucun ou un seul des 12 élèves identifie des fractions qui sont équivalentes, et ce, même lorsque la relation multiplicative entre les termes des fractions est entière. La moitié des élèves semble s'appuyer sur un raisonnement additif pour comparer des fractions en établissant une relation d'équivalence entre des fractions dont les termes présentent une même différence, soit entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{3}$ ainsi qu'entre $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{5}$. Par ailleurs, 10 des 12 élèves (83 %) considèrent équivalentes des fractions qui sont des inverses multiplicatifs, en l'occurrence $\frac{2}{4}$ et $\frac{4}{2}$. À l'image de leur groupe-classe, les élèves sélectionnés n'identifient correctement aucune fraction équivalente et considèrent plutôt comme étant équivalentes soit des fractions qui ont le même écart entre le numérateur et le dénominateur, soit des fractions qui sont des inverses multiplicatifs.

6.1.4.3 Identification d'une fraction sur une droite numérique

La question 9 consiste à situer $\frac{2}{3}$ sur une droite numérique. Seulement 17 % des élèves de OR1 et 24 % de ceux de OR2 réussissent cette question. Dans la classe AS, aucun élève ne la réussit. À l'image des élèves de leur classe, aucun des élèves sélectionnés ne situe correctement $\frac{2}{3}$ sur la droite. Ce contexte mathématique ne semble pas familier aux élèves.

6.1.4.4 Identification du nombre de a/b dans x

À la question 7 du prétest, les élèves doivent répondre aux cinq questions suivantes :

- a) *Combien il y a de $\frac{1}{8}$ dans 1 ?*
- b) *Combien il y a de $\frac{2}{8}$ dans 1 ?*
- c) *Combien il y a de $\frac{1}{5}$ dans 4 ?*
- d) *Combien il y a de $\frac{1}{12}$ dans $\frac{1}{3}$?*
- e) *Combien il y a de $\frac{2}{3}$ dans 2 ?*

Dans les deux classes de 6^e année, presque tous les élèves identifient correctement le nombre de $1/8$ dans 1 (91 % dans OR1 et 88 % dans OR2) et de $2/8$ dans 1 (83 % dans OR1 et 84 % dans OR2). La majorité des élèves réussit également à identifier le nombre de $1/5$ dans 4 (65 % dans OR1 et 76 % dans OR2) et de $1/12$ dans $1/3$ (70 % dans OR1 et 64 % dans OR2). Trouver le nombre de $2/3$ dans 2 est un peu plus difficile, surtout pour les élèves de la classe OR1 (43 % dans OR1 et 60 % dans OR2). Parmi les élèves sélectionnés de ces classes, E6 réussit les 5 items, E1 réussit les items a) et e), et E4 ne réussit que l’item a). Les élèves E2, E3 et E5 n’obtiennent aucune réponse juste.

Dans la classe AS, seul l’item portant sur le nombre de $1/8$ dans 1 est globalement réussi (58 %). Les autres items sont réussis par un maximum de 2 des 12 élèves de la classe. Parmi les élèves sélectionnés, E7 réussit les items a) et e), E8 réussit l’item a) seulement et E9 ne réussit aucun item.

En somme, concernant la catégorie portant sur la fraction comme nombre, la majorité des élèves des classes OR1 et OR2 est en mesure de comparer correctement des fractions qui ont un numérateur commun et celles qui ont un dénominateur commun, ce qui est également le cas des élèves E3, E4 et E6. Ces trois élèves ainsi que l’élève E2, tout comme la majorité des élèves de leur classe, reconnaissent l’équivalence de deux fractions lorsque les termes entretiennent une relation multiplicative entière entre eux. De plus, la relation $b \times 1/b = 1$ semble être établie pour la plupart des élèves des classes OR, réussissant ainsi à identifier le nombre de $1/8$ dans 1, ce qui est également le cas des élèves E1, E4 et E6. Ainsi, concernant cette catégorie de questions, les résultats montrent que le niveau de connaissances des élèves E4 et E6 est comparable à celui des élèves de leur classe. Les élèves E1 et E5, qui s’appuient parfois sur un raisonnement additif pour juger de l’équivalence de deux fractions, semblent être ceux, parmi les élèves sélectionnés des classes OR, qui éprouvent le plus de difficulté. Dans la classe AS, à l’image des élèves de leur classe, aucun des élèves sélectionnés ne réussit à comparer adéquatement les fractions qui ont un numérateur commun ainsi que celles qui ont un dénominateur commun. De plus, les élèves s’appuient davantage sur un raisonnement additif que multiplicatif pour juger de l’équivalence de deux fractions.

6.2 Performances des élèves sélectionnés à l'entretien d'évaluation

Nous présentons les performances des élèves pour chacune des tâches de l'entretien. Rappelons que la tâche 1 repose sur les codes oraux et écrits des fractions, les tâches 2 et 3 portent sur les structures multiplicatives dans \mathbb{N} et la tâche 4, sur le traitement de l'égalité $n \times a/b = x$. Étant donné les difficultés éprouvées par les élèves à la question 16 du prétest, une cinquième tâche portant sur la comparaison de rapport a été ajoutée.

6.2.1 Tâche sur les codes oraux et écrits des fractions

Quatre fractions sont dictées : $1/2$, $2/3$, $5/5$ et $8/7$. Seuls E5 et E9 font une erreur. Celle-ci repose, dans les deux cas, sur une confusion entre les mots « tiers » et « quarts », les conduisant ainsi à écrire $2/4$ au lieu de $2/3$.

6.2.2 Tâche sur les faits multiplicatifs

Six faits multiplicatifs sont demandés oralement: 2×7 , 4×5 , 8×2 , 10×3 , 9×3 , 6×8 . Tout comme le montraient les résultats à la première question du prétest, les trois élèves de la classe AS réussissent moins de faits multiplicatifs que les élèves des classes OR. Parmi les élèves sélectionnés dans les classes OR, les trois élèves (E2, E3 et E6) qui ont réussi les 20 faits multiplicatifs en une minute à la question 1 du prétest, ont réussi l'ensemble des faits multiplicatifs par rappel direct lors de l'entretien. Les élèves ayant obtenu 15/20 (E5) et 14/20 (E1) au prétest n'ont fait qu'une erreur à 6×8 . Contrairement à ce que laissent croire les résultats au prétest (7/20), l'entretien montre que E4 semble connaître plusieurs faits multiplicatifs et qu'elle est en mesure de mobiliser des stratégies variées pour trouver les produits dont elle ne peut se rappeler directement. À l'entretien, les connaissances de E4 concernant les faits multiplicatifs apparaissent semblables à celles des élèves E1 et E5.

Concernant les élèves sélectionnés dans la classe AS, bien que E7 soit l'élève qui ait le moins bien performé lors du prétest (2/20), les difficultés de E8 semblent plus importantes à l'entretien. Effectivement, contrairement aux élèves E7 et E9, l'élève E8 ne reconnaît pas la commutativité de la multiplication et elle n'est pas en mesure de s'appuyer sur un résultat connu pour identifier le produit d'un fait multiplicatif non établi.

6.2.3 Tâche sur le pliage de bandes de papier (structures multiplicatives)

La tâche 3 porte sur le résultat de pliages d'une bande de papier et sur la réalisation d'un pliage. La rétroaction fournie entre deux pliages permet à quelques élèves d'obtenir des réussites. Seuls E3, E4 et E5 anticipent correctement le résultat du pliage d'une bande par 2 et ensuite par 3. Après la rétroaction du premier pliage, les élèves E3, E4 et E5, mais aussi E1 et E6, anticipent le résultat d'un pliage par 3 et ensuite par 3. Lorsque les élèves doivent effectuer un pliage, seul l'élève E2 réussit à plier une bande en 8 parties égales. Le pliage en 12 parties égales est par la suite réussi par E2 et également par E3 et E4. Enfin, les trois élèves du groupe AS n'ont réussi aucun des items.

6.2.4 Tâches sur la résolution de problèmes reposant sur l'équation $n \times a/b = x$

La tâche 4 repose sur le traitement de l'égalité $n \times a/b = x$. Plusieurs énoncés de problème impliquant différents contextes et des valeurs numériques variées sont soumis aux élèves. Les problèmes sont ici présentés en fonction du contexte sur lequel ils reposent. Ainsi, nous traitons successivement les performances des élèves aux problèmes impliquant des gâteaux, des litres, des jetons puis des segments.

6.2.4.1 Problèmes impliquant des gâteaux

Six problèmes visant à identifier combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau sont nécessaires pour obtenir x gâteaux sont présentés. Ces problèmes sollicitent ainsi le sens mesure de la fraction.

- a) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir 1 gâteau complet ?
- b) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir 2 gâteaux complets ?
- c) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir 5 gâteaux complets ?
- d) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir $1/2$ gâteau ?
- e) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir $1/4$ gâteau ?
- f) Combien de morceaux de $1/8$ d'un gâteau faut-il pour avoir $3/4$ gâteau ?

La succession de questions de même type permet à certains élèves de s'adapter et de réussir quelques problèmes. Ainsi, le soutien de l'expérimentatrice a été nécessaire à la résolution

pour trois élèves (E2, E5 et E9) à l'item a), pour un élève (E2) à l'item b), et pour aucun élève à l'item c). Aux trois items suivants, x est une fraction, d'abord unitaire (d et e) et ensuite non unitaire (f). Si tous les élèves réussissent l'item d), deux élèves (E7 et E9) échouent l'item e) et quatre élèves (E3, E5, E7 et E9) échouent l'item f). Notons qu'à l'exception de l'item e), les performances des élèves de la classe AS sont comparables à celles des élèves des classes OR1 et OR2.

6.2.4.2 Problèmes impliquant des litres

Dans les deux premiers problèmes, a/b est recherché, alors que dans les deux derniers, x est recherché.

- a) *Si un pot contient 1 litre d'eau et que je transvide l'eau dans ces 5 verres (en prenant appui sur le dessin) pour qu'il y en ait autant dans chacun des 5 verres, quelle fraction du litre d'eau se trouve dans chacun des verres ?*
- b) *Si un pot contient 3 litres d'eau et que je transvide l'eau dans ces 4 verres (en prenant appui sur le dessin) pour qu'il y en ait autant dans chacun des 4 verres, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau par verre ?*
- c) *Si je transvide 9 verres contenant chacun $1/3$ de litre d'eau dans un pot, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau dans le pot ?*
- d) *Si je transvide 3 verres contenant chacun $2/3$ de litre d'eau dans un pot, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau dans le pot ?*

Peu d'élèves réussissent ces problèmes sans aide : l'élève E4 réussit les items a) et d), l'élève E3 réussit l'item a) et l'élève E6, l'item b). Devant l'impasse de certains élèves, l'expérimentatrice modifie les variables numériques (voir annexe I), ce qui permet aux trois élèves du groupe OR2 (E4, E5 et E6) et à l'élève E2 de OR1 de réussir l'ensemble des problèmes. Les deux autres élèves de OR1, E1 et E3, ont réussi les items a) et c) avec adaptation. Dans le groupe AS, les adaptations proposées n'ont pas permis aux élèves E7 et E8 de réussir les problèmes, mais ont permis à E9 de réussir l'item a).

6.2.4.3 Problèmes impliquant des jetons

Ces problèmes visent soit l'identification d'une fraction d'un tout collection (items *a* et *b*), soit la construction d'un tout collection (items *c*, *d*, *e* et *f*).

- a) J'ai 8 jetons. Tu as le $\frac{1}{4}$ de mes jetons. Combien as-tu de jetons ?*
- b) J'ai 10 jetons. Tu as les $\frac{3}{5}$ de mes jetons. Combien as-tu de jetons ?*
- c) J'ai 4 jetons, ces 4 jetons représentent le $\frac{1}{3}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?*
- d) J'ai 5 jetons, ces 5 jetons représentent les $\frac{5}{6}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?*
- e) J'ai 6 jetons, ces 6 jetons représentent les $\frac{2}{3}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?*
- f) Problème écrit : « J'ai 9 jetons. J'ai les $\frac{3}{4}$ de tes jetons. Combien as-tu de jetons ?*

Les items sur l'identification d'une fraction d'un tout collection sont mieux réussis que ceux portant sur la construction du tout. En effet, cinq élèves (E2, E4, E5, E6, E7) ont réussi l'item *a*) et cinq élèves également (E2, E3, E4, E5, E6) ont réussi l'item *b*). En revanche, deux élèves seulement (E4 et E6) ont réussi les items *c*), *d*), *e*) et *f*). Construire un tout est plus exigeant, car les opérations à réaliser, diviser par le numérateur de la fraction et multiplier par son dénominateur, sont contraires à la représentation de la fraction en tant que partie/tout. Enfin, dans le groupe OR1, E1 n'a réussi aucun item, E2 a réussi deux items et E3, un item. Dans le groupe OR2, les élèves E4 et E6 ont obtenu les réponses justes à tous les problèmes et E5 a réussi les deux premiers items. Dans le groupe AS, seul E7 a réussi un item.

6.2.4.4 Problèmes impliquant des segments

La fraction $\frac{a}{b}$ exprime un opérateur. Il s'agit d'identifier la mesure d'un segment étant donné la mesure d'un premier segment et une fraction opérateur.

- a) Le segment B mesure les $\frac{3}{4}$ du segment A (8 cm). Dessine le segment B.*
- b) Le segment A (3 cm) mesure le $\frac{1}{4}$ du segment B. Dessine le segment B.*
- c) Le segment A (8 cm) mesure les $\frac{8}{5}$ du segment B. Dessine le segment B.*
- d) Le segment B mesure les $\frac{4}{3}$ du segment A (6 cm). Dessine le segment B.*
- e) Le segment A mesure 15 cm. Il mesure les $\frac{3}{5}$ du segment B. Combien mesure le segment B ?*

Les items a) et b) sont ceux qui sont les mieux réussis par les élèves. Trois élèves (E2, E5, E6) réussissent l’item a) et cinq élèves (E1, E2, E3, E4, E6) réussissent l’item b). Les items c), d) et e) sont réussis par un seul élève : E6 répond correctement à l’item c) et E4, aux items d) et e). Ainsi, les élèves du groupe OR1 réussissent chacun un ou deux items, les élèves E4 et E6 de OR2 répondent correctement à trois items alors que E5 en réussit un seul. Aucun item n’est réussi par les élèves du groupe AS.

6.2.5 Tâche sur la comparaison de rapports

La tâche portant sur la comparaison de rapports a été ajoutée en raison des difficultés des élèves à la question 16 du prétest. Les élèves doivent identifier, parmi deux sacs comportant chacun des billes noires et des billes blanches, celui dans lequel on a le plus de chances de piger une bille noire. S’appuyant sur l’entretien critique de Piaget, l’expérimentatrice déstabilise l’élève en utilisant des contre-suggestions. Remettre en question les affirmations de l’élève permet d’une part, d’évaluer la solidité de ses convictions et d’autre part, de mieux comprendre son activité logique car l’élève est conduit à développer davantage ses arguments. Les questions sont pensées de façon à observer si les élèves favorisent davantage le traitement additif ou le traitement multiplicatif pour comparer des rapports. Par exemple, à la question f) (voir tableau 6.2), si l’élève répond correctement à la question, l’expérimentatrice demande : *Un autre élève a dit que les chances d’obtenir une bille noire sont identiques parce que, dans les deux sacs, il y a trois billes noires de plus que de billes blanches. Qu’en penses-tu ?*

Tableau 6.2

Nombre d'élèves obtenant une réponse juste à chacun des items de la tâche 5 de l'entretien

	Sac A	Sac B	Nombre d'élèves (sur 9) obtenant une réponse juste
a)	2 billes noires 7 billes blanches	3 billes noires 7 billes blanches	9
b)	2 noires 4 blanches	3 noires 6 blanches	6
c)	3 noires 5 blanches	3 noires 6 blanches	8
d)	2 noires 1 blanche	5 noires 4 blanches	2
e)	3 noires 9 blanches	5 noires 15 blanches	2
f)	5 noires 2 blanches	10 noires 7 blanches	2

Aux items a) et c), les sacs A et B contiennent soit le même nombre de billes blanches, soit le même nombre de billes noires. Tous les élèves répondent correctement à l'item a). Cependant, à l'item c), une élève (E8) considère que les chances de piger une bille noire sont identiques dans les deux sacs, car le nombre de billes noires est le même. La contre-suggestion de l'expérimentatrice ne permet pas de relancer l'élève.

Aux items b) et e), le rapport entre le nombre de billes noires et le nombre de billes blanches est le même dans les deux sacs. Six élèves (E2, E3, E4, E5, E6, E7) réussissent l'item b) dans lequel le rapport est de 2 pour 1, tandis que deux élèves (E2 et E6) obtiennent une réponse juste à l'item b), où le rapport est de 3 pour 1. Il semble donc considérablement plus aisé pour les élèves de procéder à un traitement multiplicatif lorsque le rapport est de 2 pour 1 que lorsqu'il est de 3 pour 1.

Aux items d) et f), l'écart entre le nombre de billes noires et le nombre de billes blanches est le même dans les deux sacs : il y a une bille noire de plus que de billes blanches à l'item d) et trois billes noires de plus que de billes blanches à l'item f). Dans les deux cas, seulement deux élèves (E2 et E6) établissent correctement la comparaison. Les autres élèves adoptent un raisonnement additif et considèrent ainsi que la chance de piger une bille noire est la même dans les deux sacs. À l'exception de l'élève E8, la contre-suggestion de l'expérimentatrice conduit cependant les élèves à douter de leur réponse.

Enfin, les élèves E2 et E6 semblent privilégier un raisonnement multiplicatif pour comparer des rapports, et l'élève E8 semble au contraire privilégier un raisonnement additif. Les autres élèves hésitent entre un raisonnement additif et multiplicatif.

6.3 Conclusion concernant les performances des élèves sélectionnés avant la séquence d'enseignement

Les trois élèves sélectionnés dans la classe OR1 semblent être des élèves faibles au sein de leur classe. Leurs connaissances sur les fractions apparaissent comme étant relativement homogènes. Les élèves E1, E2 et E3 réussissent respectivement 7, 8 et 11 items sur 30 au prétest. Cependant, à l'entretien, les performances de E1 sont considérablement inférieures à celles des élèves E2 et E3. Concernant la classe OR2, de façon générale, les élèves qui y sont sélectionnés semblent posséder un peu plus de connaissances sur les fractions que ceux choisis dans OR1. En effet, les deux élèves qui réussissent le mieux au prétest (E4 et E6) proviennent de OR2. D'ailleurs, les performances de l'élève E6 sont comparables à celles des élèves de sa classe. Cette élève, considérablement plus forte que les huit autres élèves sélectionnés, réussit 21 items sur 30 au prétest. Les élèves E4 et E5, performant moins bien au prétest que la majorité des élèves de leur classe : l'élève E4 réussit 14 items et l'élève E5, 9 items. Ainsi, les connaissances sur les fractions des élèves de OR2 sont moins homogènes que celles du groupe OR1. Les résultats à l'entretien individuel vont dans le même sens que ceux du prétest. En effet, les deux élèves sélectionnés (E4, E6) qui réussissent le mieux au prétest sont également celles qui performant le mieux à l'entretien individuel. Notons cependant que l'écart entre les performances de E6 et E4 est moins important à l'entretien qu'au prétest. Les résultats à l'entretien, encore plus que ceux du prétest, laissent penser que les difficultés avec les fractions seraient plus importantes chez E5 que chez E4 et E6.

Enfin, les performances des élèves sélectionnés dans la classe AS sont inférieures à celles des élèves sélectionnés dans les classes OR1 et OR2. Les performances au prétest suggèrent que les connaissances des élèves E8 et E9 sont comparables à celles des élèves de leur classe. En effet, E8 réussit 4 items sur 30 et E9, 3 items sur 30. En revanche, l'élève E7, qui réussit 10 items au prétest, posséderait davantage de connaissances sur les fractions que les élèves de sa classe. Cependant, à l'entretien, les performances de cet élève sont comparables à celles des

élèves E8 et E9. Enfin, parmi les neuf élèves sélectionnés, les trois élèves qui performant le moins, autant au prétest qu'à l'entretien, sont issus de la classe AS. Ainsi, bien que nous ayons sélectionné les élèves les plus forts de la classe AS, les performances de ces élèves sont inférieures à celles des élèves les plus faibles des classes OR. Cet écart pourrait s'expliquer par les phénomènes didactiques propres à l'adaptation scolaire relevés dans les écrits scientifique et considérés peu favorables à l'apprentissage, tels que le morcellement des tâches, la centration sur les erreurs et le ralentissement du temps didactique. Cet écart pourrait aussi s'expliquer par le fait que le programme exerce moins de poids sur l'enseignement en classe spéciale qu'en classe ordinaire. Ainsi, il est fort possible que la notion de fraction, objet d'enseignement plutôt spécifique du 3^e cycle de l'ordre primaire, ne soit pas considérée comme prioritaire dans la classe d'adaptation scolaire. Cette hypothèse est d'autant plus pertinente que, considérant que plusieurs élèves de cette classe ne maîtrisent pas encore les tables de multiplication, il ne serait pas étonnant que les structures multiplicatives soient davantage investies que la notion de fraction.

6.4 Confrontation des performances au prétest et au posttest

La comparaison entre les résultats au prétest et au posttest vise à évaluer l'impact de la séquence d'intervention orthopédagogique sur les performances des élèves à un test écrit. Nous procédons d'abord à une analyse des performances à chacun des tests en tenant compte des caractéristiques des questions et, ensuite, à une analyse visant à comparer les performances au prétest et au posttest en fonction des élèves et des groupes d'élèves.

6.4.1 Analyse en fonction des questions et de leur catégorie d'appartenance

Comme le montre le tableau 6.3, parmi les 29 items du questionnaire, 22 (75,9 %) sont réussis par un nombre plus important d'élèves au posttest qu'au prétest, 5 (17,2 %) sont réussis par le même nombre d'élèves, et 2 (6,9 %), par un nombre moins élevé d'élèves. Étant donné qu'aucun enseignement de la fraction n'a été réalisé par les enseignants des trois classes entre le prétest et le posttest, ces résultats montrent que la séquence est favorable à l'apprentissage des fractions. Cette amélioration concerne les trois catégories de questions

relatives aux fractions : 1) la relation multiplicative partie/tout; 2) la résolution de problèmes; 3) la fraction comme nombre.⁶⁷ Les performances des élèves au prétest et au posttest pour chacune de ces catégories sont confrontées dans les sections suivantes.

Tableau 6.3
Nombre d'élèves ayant réussi chacune des questions en fonction de leur catégorie d'appartenance au prétest et au posttest

		Nombre d'élèves ayant réussi au prétest	Nombre d'élèves ayant réussi au posttest
Relation mult. partie/tout	Qt4	2 (E2, E4)	5 (E2, E4, E6, E8, E9)
	Qt5	1 (E4)	2 (E4, E6)
	Qt10	7 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7)	7 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7)
	Qt11	5 (E2, E4, E5, E6, E7)	5 (E3, E4, E5, E6, E7)
	Qt12	5 (E3, E4, E5, E6, E7)	8 (E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9)
	Qt13	1 (E7)	4 (E2, E4, E6, E7)
	Qt15	9 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9)	9 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9)
Résolution de problèmes	Qt6	2 (E4, E6)	5 (E1, E3, E4, E5, E6)
	Qt8a	4 (E3, E4, E6, E7)	8 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9)
	Qt8b	3 (E3, E4, E6)	5 (E3, E4, E6, E8, E9)
	Qt8c	5 (E1, E4, E5, E6, E9)	7 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E9)
	Qt8d	1 (E4)	3 (E3, E4, E6)
	Qt8e	3 (E2, E5, E6)	4 (E2, E5, E6, E8)
	Qt14	2 (E4, E6)	5 (E1, E2, E4, E6, E9)
	Qt16a	3 (E2, E6, E7)	3 (E3, E5, E9)
	Qt16b	0	2 (E4, E5)
Fraction comme nombre	Qt2a	2 (E3, E6)	8 (E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9)
	Qt2b	2 (E3, E6)	4 (E3, E4, E6, E9)
	Qt2c	7 (E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8)	6 (E1, E2, E3, E4, E5, E6)
	Qt2d	1 (E9)	3 (E7, E8, E9)
	Qt3a	3 (E3, E5, E6)	6 (E1, E2, E3, E4, E5, E6)
	Qt3b	2 (E1, E3)	5 (E1, E2, E3, E4, E6)
	Qt3c	0	3 (E3, E5, E6)
	Qt7a	5 (E1, E4, E6, E7, E8)	9 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9)
	Qt7b	1 (E6)	7 (E1, E3, E4, E5, E6, E7, E9)
	Qt7c	1 (E6)	4 (E1, E3, E5, E6)
	Qt7d	2 (E6, E8)	4 (E2, E3, E4, E6)
	Qt7e	3 (E1, E6, E7)	2 (E2, E6)
	Qt9	0	0

⁶⁷ La catégorie portant sur les faits multiplicatifs, dont seule la question 1 fait partie, n'est pas analysée, car la séquence ne vise pas l'apprentissage des faits multiplicatifs. Les performances des élèves à cette question sont d'ailleurs comparables au prétest et au posttest.

6.4.1.1 La relation multiplicative partie/tout

Concernant l'identification d'une fraction à partir de la représentation d'un tout, le même nombre d'élèves réussit à noircir correctement a/b de n jetons au prétest et au posttest (questions 10 et 11). À la question 15, les neuf élèves sélectionnés, au prétest et au posttest, répondent correctement à au moins cinq des sept items, ce que nous avons considéré comme une réussite. Cependant, une analyse par item montre une amélioration concernant la représentation F, qui correspond à un tout continu qui n'est pas séparé en quatre parties égales, mais dont $1/4$ est prélevé. Trois des quatre élèves qui avaient échoué au prétest (E1, E2, E3) reconnaissent, au posttest, qu'il s'agit d'une représentation de $1/4$. La séquence semble ainsi avoir permis aux élèves du groupe OR1 d'interpréter une fraction $1/b$ comme étant la partie qui entre b fois dans le tout.

Des améliorations plus importantes sont observées concernant les questions portant sur l'identification ou la construction d'un tout, ce qui s'explique notamment par le fait que ces questions ont été plus échouées que celles portant sur l'identification d'une fraction d'un tout. Trois élèves de plus réussissent, au posttest, à identifier correctement le gâteau complet à partir de l'illustration d'un morceau qui correspond aux $2/3$ du gâteau (question 4). Lorsqu'il s'agit d'une ficelle au lieu d'un gâteau (question 5), un élève de plus réussit à identifier la ficelle entière à partir de l'illustration des $2/3$ de la ficelle. Concernant les questions 12 et 13 dans lesquelles est présenté a/b d'une collection de jetons et où l'élève doit identifier le nombre de jetons dans la collection complète, pour ces deux questions, trois élèves de plus réussissent lors du posttest.

6.4.1.2 La résolution de problèmes

Il y a une amélioration considérable en ce qui a trait à la résolution de problèmes, et ce, particulièrement dans le problème d'isomorphisme de mesures impliquant la multiplication (question 8a), qui est réussi par quatre élèves de plus au moment du posttest. De surcroît, trois élèves de plus réussissent les deux problèmes scalaires dans lesquels la relation est indirecte (questions 6 et 14). Il y a également une amélioration dans les problèmes d'isomorphisme de mesure associés à la division. Deux élèves de plus réussissent chacun des problèmes de division regroupement (questions 8b, 8c et 8d) et un élève de plus, le problème

de division partage (question 8e), qui sollicite essentiellement l'interprétation de la fraction en tant que quotient. Concernant les problèmes portant sur le sens rapport de la fraction, le même nombre d'élèves (mais des élèves différents) réussit la question 16a et deux élèves de plus réussissent la question 16b lors du posttest.

6.4.1.3 La fraction comme nombre

Dans cette section est effectuée la confrontation des performances au prétest et posttest concernant les questions portant sur la comparaison de fractions, sur l'équivalence des fractions, sur l'identification du nombre de a/b dans x et sur l'identification d'une fraction sur une droite numérique.

D'abord, une amélioration notable est observée concernant la comparaison de fractions (question 2) : six élèves de plus réussissent les comparaisons dans lesquelles le numérateur et le dénominateur sont inversés, deux élèves de plus réussissent les comparaisons de fractions ayant un dénominateur commun et deux élèves de plus également réussissent les comparaisons dans lesquelles l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même. Cependant, un élève de moins réussit les comparaisons de fractions qui ont un numérateur commun. Sur la base de l'expérimentation effectuée, nous faisons l'hypothèse que certains élèves, avant la séquence, suivaient la règle selon laquelle plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande, et ce, sans tenir compte du numérateur. Les situations vécues au cours de la séquence auraient peut-être conduit à remettre cette règle en question.

Concernant la question portant sur les fractions équivalentes (question 3), les performances des élèves sont meilleures au posttest qu'au prétest. Cette amélioration concerne particulièrement l'identification de deux fractions équivalentes lorsque les termes n'entretiennent pas une relation multiplicative entière entre eux. En effet, l'équivalence entre $4/2$ et $10/5$ est établie par cinq élèves de plus au posttest qu'au prétest. Une amélioration tout aussi importante est observée concernant l'équivalence entre une fraction et un nombre entier (en l'occurrence, entre $4/2$ et 2), établie par cinq élèves de plus au posttest. De plus, moins de fausses équivalences sont établies au moment du posttest : deux fractions dont l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même sont considérées équivalentes à neuf reprises au

prétest et à six reprises au posttest, et un élève de moins considère des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont inversés comme étant équivalentes lors du posttest.

Il y a une amélioration considérable entre les performances au prétest et au posttest à la question 7, où il s'agit d'identifier combien il y a de a/b dans x . En effet, au posttest, quatre élèves de plus identifient correctement combien il y a de $1/8$ dans 1, six élèves de plus identifient combien il y a de $2/8$ dans 1, trois élèves de plus identifient combien il y a de $1/5$ dans 4 et deux élèves de plus identifient combien il y a de $1/12$ dans $1/3$. Cependant, un élève de moins reconnaît le nombre de $2/3$ dans 2. On peut se demander si les réussites à cette question relèvent toutes d'une réelle compréhension. Étant donné que la question contient les nombres $2/3$ et 2, il semble possible qu'un élève, ne connaissant pas la solution, choisisse d'écrire 3.

La question 9, qui portait sur l'identification d'une fraction sur une droite numérique, n'est réussie par aucun des élèves sélectionnés, ni au prétest ni au posttest. Notons que la droite numérique n'a pas été utilisée lors de la séquence d'enseignement.

6.4.2 Analyse en fonction des élèves et de leur groupe d'appartenance

Huit des neuf élèves suivis obtiennent de meilleures performances au posttest qu'au prétest. Dans les deux groupes OR, il y a une amélioration substantielle des performances pour chacun des élèves. Dans le groupe OR1, les élèves E1, E2 et E3 ont réussi, respectivement, sept, huit et dix items de plus au posttest qu'au prétest. Dans le groupe OR2, les élèves E4 et E5 ont réussi respectivement huit et neuf items de plus et l'élève E6, qui avait obtenu le meilleur résultat au prétest parmi les élèves sélectionnés (soit de 20/29), réussit cinq items de plus au posttest. Dans la classe d'adaptation scolaire, l'élève E9 réussit dix items de plus lors du posttest, E8 connaît une amélioration moins importante en réussissant quatre items de plus et E7 obtient le même score au prétest et au posttest. Le tableau 6.4 permet d'observer les résultats au prétest et au posttest de chaque élève en fonction des différentes catégories de questions.

Tableau 6.4

Nombre d'items réussis au prétest et au posttest en fonction de leur catégorie d'appartenance pour chacun des élèves sélectionnés

Élèves en fonction de leur groupe d'appartenance		Prétest				Posttest			
		A (sur 7)	B (sur 9)	C (sur 13)	Total (sur 29)	A (sur 7)	B (sur 9)	C (sur 13)	Total (sur 29)
OR1	E1	2	1	3	6	2	4	7	13
	E2	4	2	1	7	5	4	6	15
	E3	3	2	5	10	4	6	10	20
OR2	E4	6	6	2	14	7	7	8	22
	E5	4	2	2	8	4	6	7	17
	E6	4	7	9	20	7	7	11	25
AS	E7	5	2	3	10	5	1	4	10
	E8	1	0	3	4	3	2	3	8
	E9	1	1	1	3	3	5	5	13

Légende

A : Nombre d'items réussis dans la catégorie *relation multiplicative partie/tout*

B : Nombre d'items réussis dans la catégorie *résolution de problèmes*

C : Nombre d'items réussis dans la catégorie *la fraction comme nombre*

Dans le groupe OR1, les scores sont semblables au prétest et au posttest concernant les items portant sur la relation multiplicative partie/tout : un élève (E1) obtient le même score et deux élèves (E2 et E3) réussissent un item de plus au posttest. On constate cependant une amélioration plus importante en ce qui a trait aux items relatifs à la résolution de problèmes. Les élèves E1, E2 et E3 réussissent respectivement trois, deux et quatre items de plus au posttest. L'amélioration des performances concerne principalement les items s'inscrivant dans la catégorie *la fraction comme nombre*. L'élève E1 réussit quatre items de plus, et les élèves E2 et E3 en réussissent cinq de plus.

Dans le groupe OR2, concernant les items portant sur la relation multiplicative partie/tout, l'élève E5 obtient le même score au prétest et au posttest, E4 réussit un item de plus au posttest et E6 connaît une amélioration considérable en réussissant trois items de plus. L'amélioration en ce qui a trait aux items portant sur la résolution de problèmes concerne essentiellement E5, qui réussit quatre items de plus. Les élèves E4 et E6, qui avaient obtenu un score plus élevé que les autres élèves sélectionnés lors du prétest, connaissent peu d'amélioration : E4 réussit un item de plus et E6 obtient le même score. La catégorie dans

laquelle l'amélioration est la plus importante, tout comme pour le groupe OR1, est celle portant sur la fraction comme nombre. Les élèves E4 et E5 réussissent respectivement six et cinq items de plus au posttest et l'élève E6, qui obtient un score considérablement plus élevé que les autres au prétest (9/13), réussit deux items de plus au posttest.

Dans le groupe AS, les élèves E8 et E9 réussissent deux items de plus au posttest qu'au prétest concernant la relation multiplicative partie/tout et E7 obtient le même score. En ce qui a trait aux items portant sur la résolution de problèmes, les élèves E8 et E9 réussissent respectivement deux et quatre items de plus au posttest et l'élève E7 en réussit un de moins. Enfin, l'amélioration des performances concernant les items relatifs à la fraction comme nombre est importante chez E9, qui réussit quatre items de plus. Cependant, E7 réussit un seul item de plus et E8 obtient le même score à chacun des tests.

En somme, les résultats montrent qu'il y a une amélioration considérable entre les performances au prétest et celles au posttest. En effet, 22 des 29 items du questionnaire sont réussis par plus d'élèves au posttest qu'au prétest et huit des neuf élèves sélectionnés obtiennent de meilleurs résultats au posttest. Bien que l'amélioration soit moins significative chez les élèves du groupe AS que chez ceux des groupes OR, l'écart relativement important entre les performances au prétest et au posttest suggère que la séquence élaborée a favorisé l'apprentissage des fractions, et donc que les conditions sur lesquelles elle s'appuie sont propices à l'intervention en contexte orthopédagogique. Le chapitre suivant, qui présente une analyse détaillée de chacune des situations expérimentées, permet de mieux comprendre l'effet de la séquence sur l'apprentissage des élèves et, en particulier, l'effet moins important de la séquence sur les élèves du groupe AS que sur ceux des groupes OR.

CHAPITRE VII

ANALYSE A POSTERIORI DE LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Le chapitre VII porte sur l'analyse *a posteriori* de la séquence d'enseignement. Pour chacune des quatre situations qui composent la séquence, nous dressons d'abord un tableau général des activités réalisées et de leur durée pour chacun des groupes. Le temps accordé aux activités est comparé, et les modifications apportées à la situation originale sont expliquées. Nous procédons ensuite à une validation interne de la situation, c'est-à-dire que les stratégies, et donc les connaissances investies par les élèves, sont analysées en fonction des analyses *a priori* afin de juger si les situations présentées ont permis l'élaboration de stratégies faisant appel aux connaissances visées sur la fraction. Les interventions clés et les moments sensibles sont exposés et finement analysés.

Avant d'entrer dans l'analyse détaillée de chacune des situations, notons que le temps total octroyé à la séquence est d'environ cinq heures dans le groupe AS, d'environ cinq heures et demie dans le groupe OR1 et d'environ six heures dans le groupe OR2. La séquence s'est toutefois étalée, dans chacun des groupes, sur huit séances d'environ 40 minutes. Le temps accordé aux différentes situations varie considérablement. Comme le montre le tableau 7.1, dans chacun des groupes, la deuxième situation est celle dont la durée est la plus longue (entre 122 et 153 minutes) et la quatrième situation, celle dont la durée est la plus courte (entre 32 et 46 minutes).

Tableau 7.1

Répartition du temps de chacune des situations de la séquence pour les trois groupes d'élèves

	OR1	OR2	AS
Situation 1	76 min 30 s	77 min 25 s	61 min 35 s
Situation 2	122 min	132 min 35 s	152 min 20 s
Situation 3	90 min 45 s	105 min 30 s	50 min 30 s
Situation 4	45 min 5 s	44 min 20 s	32 min 10 s
Total	334 min 20 s	359 min 50 s	296 min 35 s

7.1 Analyse de la situation sur la fraction en tant que partie d'un tout continu

La première situation vise à ce que les élèves établissent la relation multiplicative entre une fraction $1/b$ et une fraction c/d , où b est multiple de d . Les élèves doivent identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de celle-ci.⁶⁸

7.1.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes

Le tableau 7.2 présente les activités réalisées auprès de chacun des groupes d'élèves ainsi que le temps accordé à chacune d'elles pour la première situation.

Tableau 7.2

Répartition du temps de chacune des activités de la situation 1 pour les trois groupes d'élèves

SCÉNARIOS ET MOMENTS DE DÉCONTEXTUALISATION	OR1	OR2	AS
Scénario 1 a	3 min	3 min 15 s	8 min 30 s
Scénario 1 b	2 min 5 s	2 min	4 min 30 s
Décontextualisation 1	5 min 30 s	3 min 15 s	4 min 10 s
Scénario 2	5 min 15 s	6 min 40 s	7 min 10 s
Décontextualisation 2	2 min 40 s	4 min 35 s	8 min 40 s
Scénario 3 a	9 min 45 s	7 min 55 s	11 min Fin séance 1
Scénario 3b	6 min 5 s	7 min 30 s	x
Scénario ajouté	x	x	3 min 45 s
Décontextualisation 3	3 min 40 s Fin séance 1	3 min 50 s	13 min 50 s
Scénario 4	12 min 40 s	8 min 30 s	x
Décontextualisation 4	4 min 10 s	5 min 10 s Fin séance 1	x
Scénario ajouté et décontextualisation	x	7 min 40 s	x
Scénario 5	9 min 55 s	8 min 5 s	x
Décontextualisation 5	11 min 45 s	9 min	x
Total	76 min 30 s	77 min 25 s	61 min 35 s

⁶⁸ Le lecteur peut se référer à la section 5.2.1 du chapitre V (p. 95-104) pour obtenir une description plus détaillée de la première situation.

Le temps consacré à la première situation est relativement semblable dans les groupes OR1 et OR2, soit un peu moins de 80 minutes. Cependant, dans le groupe AS, elle n'a duré qu'un peu plus de 60 minutes. Cette différence tient essentiellement au fait que moins de scénarios ont été réalisés dans le groupe AS. En contrepartie, les scénarios 1a et 1b ainsi que la décontextualisation 2 ont pris, dans le groupe AS, plus du double du temps que celui pris dans les groupes OR1 et OR2. Dans les sections suivantes, l'analyse du contenu de la séquence permet de saisir ce qui distingue la progression du savoir du groupe AS en regard de celle qui caractérise les groupes OR1 et OR2.

L'ensemble des scénarios prévus a été réalisé avec les groupes OR1 et OR2. Une modification mineure, dans le groupe OR2, a été apportée. Étant donné que pour ce groupe, la première séance⁶⁹ s'est bouclée avec la fin du scénario 4, un scénario avec jeu de communication a été ajouté au début de la deuxième séance pour assurer une meilleure liaison entre les scénarios 4 et 5. Rappelons que le scénario 5 marque l'entrée sur un travail numérique reposant sur les jeux de communication effectués dans les scénarios précédents. Cet ajout était particulièrement nécessaire en raison de l'absence d'un élève de ce groupe (E4) à la première séance.

Des modifications plus substantielles ont été apportées à la séquence pour le groupe AS. Les difficultés des élèves, au cours des deux premiers scénarios, à identifier le nombre de pièces de $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de la figure, suggéraient qu'ils ne maîtrisaient pas la relation $1/b \times b = 1$. Ainsi, à la deuxième séance, les scénarios 3b, 4 et 5 ont été substitués par un scénario visant à identifier le nombre de pièces de $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir une figure entière.

⁶⁹ Une séance est une période d'intervention d'environ 40 minutes.

7.1.2 Validation interne de la première situation

Pour identifier le nombre de pièces (a) correspondant à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure, nous rappelons les trois conduites prévues dans l'analyse *a priori* :

- Conduite A* : Interpréter la fraction $1/b$ seulement au regard de c/d . Ainsi, l'élève interprète c/d comme le tout de référence.
- Conduite B* : Partitionner « mentalement » la figure pour identifier la relation multiplicative entre $1/b$ et c/d . L'élève tente alors de partitionner la figure en b parties égales pour ensuite identifier le nombre de $1/b$ dans c/d .
- Conduite C* : Établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre $1/b$ et c/d de manière à ce que $a \times 1/b = c/d$. Cette interprétation conduit à prendre en compte la relation multiplicative entre $1/b$ et c/d pour identifier a .

Le tableau 7.3 présente un aperçu général de l'évolution des conduites au cours de la première situation en tenant compte des valeurs attribuées aux variables numériques à chacun des scénarios.

Tableau 7.3
Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 1

Variables numériques pour chacun des scénarios		Conduites adoptées par chacun des élèves					
Scénarios pour chacun des groupes	Variables numériques de $a \times l/b = c/d$ ⁷⁰	Conduite A	Conduite B	Conduite C	Autres conduites	Aucune anticipation	Élève absent
1a (OR1, OR2, AS)	$a \times l/4 = 1/2$	E3	E2, E5, E7, E8, E9	E6		E1	E4
	$a \times l/4 = 1/2$		E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9			E1	E4
1b (OR1, OR2, AS)	$a \times l/8 = 1/2$	E9	E8	E2, E3, E5, E6, E7		E1	E4
	$a \times l/12 = 1/2$	E9	E8	E2, E3, E5, E6, E7		E1	E4
2 (OR1, OR2, AS)	$a \times l/b = 1/3$		E1, E3, E5, E8, E9	E2, E6	E7		E4
3a (OR1, OR2, AS)	$2 \times l/b = 1/2$	E2, E9	E5, E6, E8		E3	E1, E7	E4
	$2 \times l/b = 1/3$		E5, E6	E2	E3	E1, E7, E8, E9	E4
	$2 \times l/b = 1/6$		E5	E2, E3, E6		E1, E7, E8, E9	E4
3b (OR1, OR2)	$3 \times l/b = 1/2$	E5, E6		E2, E3		E1	E4
	$3 \times l/b = 1/3$		E5	E2, E3, E6		E1	E4
	$3 \times l/b = 1/6$			E2, E3, E5, E6		E1	E4
3 Ajouté (AS)	$a \times l/4 = 1$		E7, E8, E9				
	$a \times l/6 = 1$			E7, E8, E9			
	$a \times l/8 = 1$			E7, E8, E9			
4 (OR1, OR2)	$a \times l/10 = 1/5$		E1, E3, E5	E6	E2		E4
	$a \times l/10 = 2/5$		E1, E2, E3, E5	E6			E4
	$a \times l/20 = 2/5$		E1, E3, E5	E2, E6			E4
4 Ajouté (OR2)	$a \times l/9 = 1/3$	E4	E5	E6			
	$a \times l/6 = 2/3$			E4, E6		E5	
5 (OR1, OR2)	$a \times l/12 = 1/3$			E2, E6		E1, E4, E5	E3
	$a \times l/20 = 1/5$			E2, E4, E6		E1, E5	E3
	$a \times l/10 = 2/5$			E2, E4, E6		E1, E5	E3
	$a \times l/30 = 1/15$			E2, E6	E4	E1, E5	E3

⁷⁰ L'égale $a \times l/b = c/d$ signifie qu'il faut a pièces de l/b pour recouvrir c/d d'une figure. Les élèves doivent identifier le nombre correspondant à a ou à l/b .

De façon générale, la conduite C, c'est-à-dire celle qui fait appel à la connaissance visée par la situation, n'est pas plus souvent adoptée au terme de la situation qu'elle ne l'est au début. On peut expliquer ce résultat par le fait que le jeu sur les variables didactiques augmente progressivement, comme prévu, le niveau de difficulté des tâches. Par ailleurs, il y a généralement une diminution des conduites A et B au profit de la conduite C à l'intérieur d'un même scénario. Ces résultats témoignent d'une évolution des stratégies des élèves au cours de cette première situation.

- Scénario 1a (OR1, OR2, AS)⁷¹

Au premier énoncé du scénario 1a, la conduite B est la plus fréquente. En effet, cinq des huit élèves partitionnent mentalement la figure pour établir la relation entre $1/2$ et $2 \times 1/4$. Cette conduite est encore plus fréquente au deuxième énoncé (sept des huit élèves), ce qui permet aux élèves des deux groupes OR de faire des prévisions justes. Ce n'est toutefois pas le cas pour les élèves du groupe AS qui éprouvent des difficultés à partitionner le cercle en 6 parties égales. Un objet de savoir non prévu, soit la partition d'un cercle en parties égales, est alors investi par les élèves.

- Scénario 1b (OR1, OR2, AS)

Le scénario 1b se distingue du précédent par les valeurs attribuées à la variable « forme » (scénario 1a : cercle; scénario 1b : rectangle) et à la valeur de b dans $1/b$ qui est plus élevée (scénario 1a : 4 et 6; scénario 1b : 8 et 12). Le tableau 7.2 montre qu'il y a évolution dans les conduites adoptées au cours du scénario 1. En effet, la conduite C est adoptée par cinq des huit élèves au scénario 1b alors qu'elle n'est adoptée que par une élève au scénario 1a (E6). Ce changement relève selon nous de l'apprentissage réalisé au cours du scénario 1a ainsi que du choix de la valeur de b , qui rend la conduite B plus coûteuse. La forme de la figure ne

⁷¹ Considérant que les groupes AS, OR1 et OR2 n'ont pas réalisé tout à fait la même séquence, les sous-titres identifient le groupe ou les groupes auxquels se rapporte l'activité analysée.

semble pas affecter les conduites, car le choix d'un rectangle, forme plus facile à partitionner qu'un cercle, aurait pu au contraire encourager les élèves à recourir à la conduite B.

- Décontextualisation liée au scénario 1 (OR1, OR2, AS)

Après le scénario 1, les élèves complètent le tableau suivant :

Nombre de pièces	Fraction correspondant à la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	1/4	1/2
	1/6	1/2
	1/8	1/2
	1/12	1/2
	1/20	1/2

Les groupes OR1 et OR2 complètent facilement le tableau, témoignant d'une appropriation de la relation $a \times 1/b = 1/2$. Dans le groupe AS, E8 observe les trois premières valeurs de la colonne, *nombre de pièces* : 2, 3, 4, et propose qu'il faut 5 pièces de 1/12 pour construire 1/2.

Une fois le tableau complété correctement, l'expérimentatrice institutionnalise la relation entre a pièces $1/b$, $a \times 1/b$ et a/b . Elle utilise ensuite les résultats pour écrire une liste de fractions équivalentes à $1/2$: $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 6/12 = 10/20$ et invite les élèves à identifier d'autres fractions équivalentes. Dans le groupe OR1, les élèves E1 et E2 trouvent rapidement une fraction équivalente. Ainsi, il semblerait que même si E1 manifeste peu de connaissances dans les phases d'action, il observe et profite des échanges didactiques. Considérant que les élèves ont produit des fractions qui semblent reposer sur des doubles connus (par exemple : 8/16 pour $8 + 8 = 16$), l'expérimentatrice propose d'identifier le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est 13. Comme le montre l'extrait suivant, cette tâche est difficile mais elle conduit à un échange didactique sur un enjeu de savoir essentiel dans l'apprentissage des fractions, soit la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur.

Les élèves cherchent depuis une dizaine de secondes et n'arrivent pas à compléter la fraction 13/?

EXP : Regardez ici, toutes les fractions que vous avez écrites ici sont équivalentes, qu'est-ce que vous remarquez, qu'est-ce qu'elles ont en commun ces fractions-là (en pointant $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 6/12 = 8/16 = 5/10 = 12/24 = 50/100$) ?

E2 : C'est « toute » des chiffres pairs (en regardant les dénominateurs).

E1 : Non, pas toute, ici y'a un cinq (en pointant 5/10).

E3 : Un, deux, trois, quatre (en pointant les numérateurs).

(4 secondes : les élèves regardent la liste et semblent chercher...)

EXP : OK, si je vous demandais, il faut combien de pièces de 1/30 d'un rectangle pour avoir 1/2 rectangle ?

E3 : Quinze, quinze trentièmes.

EXP : Oui, j'ai besoin de 15 pièces de 1/30, j'ai besoin de 15/30 pour avoir 1/2. (EXP ajoute 15/30 à la liste d'équivalences.) 15/30 aussi c'est équivalent à ces fractions-là, qu'est-ce que vous remarquez ?

E2 : Ha! Je l'sais! (Il ajoute 26 en-dessous de 13 pour compléter la fraction.)

EXP : Est-ce que tu peux expliquer aux autres comment t'as fait pour trouver ça ?

E2 : Je me suis dit, 26 divisé par 2, ça donne 13.

E3 : Haaaa!!!

EXP : Oui, parce que dans toutes ces fractions, le numérateur est deux fois plus petit que le dénominateur, ce sont toutes des fractions équivalentes, elles ont toute la même valeur que 1/2.

E3 : Ben oui parce qu'on peut faire divisé par deux.

EXP : On pourrait dire aussi que le dénominateur est toujours deux fois plus grand, $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$ et ici, $50 \times 2 = 100$ (en pointant les fractions sur la liste).

E2 : Dans le fond, j'ai trouvé ça comme ça (fier de lui).

E3 : Attends, attends, je pense que j'en ai une là ! (Elle écrit 14/28, fière d'en avoir trouvé une.)

Il y a un certain décalage entre la régularité dégagée par E2 et E3, le numérateur correspond au dénominateur divisé par 2, et la formulation de l'expérimentatrice à l'effet que le dénominateur est 2 fois plus grand que le numérateur. Il semble que les élèves soient centrés sur le calcul à effectuer pour obtenir des fractions équivalentes à 1/2. L'intervention de l'expérimentatrice est d'associer ce calcul à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur comme caractéristique essentielle de la notion de fraction.

Dans le groupe OR2, on observe une conduite semblable à celle de E2 et E3. En effet, E6 formule en ces termes: « Regarde, mettons 1/2 est égal à combien... ben 1/10 est égal à combien de demies, tu fais 10 divisé par 2, ça donne 5. » La formulation, bien que maladroite (1/10 est égal à combien de 1/2 plutôt que 1/2 est égal à combien de 1/10) montre qu'elle

s'appuie sur les situations de recouvrement qui précèdent. Cette tâche est toutefois difficile pour E5; elle est « trompée » par la suite des trois premières relations traitées. En effet, E5 dégage un intervalle de deux entre les dénominateurs des trois premières fractions ($2/4$, $3/6$, $4/8$), et ce, sans considérer la relation numérateur/dénominateur. Notons que cette recherche de régularités numériques est commandée par la question de l'expérimentatrice : « Qu'est-ce que vous remarquez, qu'est-ce qu'elles ont en commun ces fractions-là ? » Visant la décontextualisation des connaissances, cette question ne fait pas référence à la situation d'action. L'élève E5 adoptait pourtant la conduite C lors du scénario 1b. L'articulation entre la situation d'action et la production de fractions équivalentes n'est pas réalisée. Deux hypothèses peuvent être engagées pour rendre compte de cette césure. D'abord, il est possible que, bien que l'élève puisse, en situation d'action, identifier qu'il faut $a \times 1/b$ pour recouvrir c/d , la relation d'équivalence entre a/b et c/d ne soit pas pour autant établie. La deuxième hypothèse est que la tâche exigeant de produire des fractions équivalentes, telle qu'elle est présentée, ne permette pas à l'élève de se référer aux connaissances investies en situation d'action.

Dans le groupe AS, les trois élèves adoptent un calcul additif pour compléter la liste de fractions équivalentes à $1/2$. Par exemple, E9 explique que $30/60$ est une fraction équivalente à $1/2$: « parce que $30 + 30$, ça fait 60. » Cette conduite peut relever des limites de leurs connaissances sur les faits multiplicatifs. Elle peut s'expliquer également par le fait que la fraction $1/2$ favorise un traitement additif étant donné qu'il suffit de doubler le numérateur pour obtenir le dénominateur et produire ainsi une fraction équivalente à $1/2$.

- Scénario 2 (OR1, OR2, AS)

Au scénario 2, la valeur de c/d est de $1/3$. Chaque élève travaille individuellement à partir d'un bon de commande différent (la valeur de b est soit 6, 9 ou 12). Ces contraintes entraînent une diminution de la conduite C au profit de la conduite B (cinq élèves sur huit). En effet, deux élèves (E3 et E5), qui adoptaient la conduite C au scénario 1b, privilégient, dans ce scénario, la conduite B.

Les trois élèves du groupe AS cherchent quant à eux le nombre de pièces pour recouvrir $1/2$ de la figure en raison d'un effet pérenne des scénarios précédents. Cet effet repose sans doute en partie par leur maîtrise insuffisante des faits multiplicatifs. Ainsi, l'élève E8 recourt à la conduite B et identifie qu'il faut 3 pièces de $1/6$. L'élève E7, adoptant une stratégie numérique, identifie qu'il faut 6 pièces de $1/12$. L'élève E9, cherchant également à recouvrir $1/2$ du rectangle, rencontre des difficultés étant donné la fraction à traiter, soit $1/9$ (b est impair). N'arrivant pas à partitionner le rectangle en 9 parties égales, elle le partitionne en 10 parties. Elle identifie alors qu'il faut 5 pièces de $1/10$ pour recouvrir la demie et tente ensuite d'adapter cette relation à celle qui est recherchée : puisque $10 - 1 = 9$, elle enlève une des 5 pièces. Elle considère ainsi qu'il faut 4 pièces de $1/9$ pour recouvrir $1/2$ rectangle.

Par ailleurs, la contrainte consistant à remettre un bon de commande à chaque élève oblige l'élève E1, qui ne s'était pas prononcé aux scénarios précédents, à faire une anticipation. L'extrait suivant montre que les interventions didactiques permettent à E1 de rétablir la relation $1/b \times b = 1$ ($1/6 \times 6 = 1$, $1/3 \times 3 = 1$ et $1/4 \times 4 = 1$). En s'appuyant sur le matériel, il dégage ensuite qu'il faut 3 fois moins de pièces de $1/6$ pour recouvrir $1/3$ d'une figure qu'il en faut pour recouvrir la figure entière et arrive ainsi à identifier qu'il faut 2 pièces de $1/6$ pour recouvrir $1/3$.

L'expérimentatrice a remis le bon de commande depuis 45 secondes. E1 n'a rien écrit et ne semble pas chercher.

EXP : Des $1/6$, il en rentre combien dans le rectangle au complet ?

E1 : Heu... trois.

EXP : Non, ce qui entre trois fois dans le rectangle, c'est $1/3$. (Elle prend appui sur le matériel : l'élève a devant lui un rectangle séparé en trois, et il est écrit $1/3$ dans chaque partie.) Pour avoir le rectangle au complet, il faut trois fois $1/3$ du rectangle. Pour avoir le rectangle au complet, il faudrait combien de pièces de $1/6$?

E1 : Je sais pas.

EXP : Est-ce que tu sais il faut combien de pièces de $1/4$ pour avoir un rectangle complet ?

E1 : Non.

EXP : OK. Je te dessine un rectangle ici (elle dessine un rectangle sur une feuille). Si je te demande de colorier $1/6$ de ce rectangle, qu'est-ce que tu vas faire ?

E1 : Je le sépare en six. (L'expérimentatrice donne un crayon, et E1 le sépare en six et colorie une partie.)

EXP : T'en as combien de $1/6$ dans ton rectangle ?

E1 : Un.

EXP : Cette partie-là (en pointant une partie non coloriée), elle correspond à quelle fraction

	de ton rectangle ?
E1 :	1/6... OK. Six, j'en ai six.
EXP :	C'est ça, il y a six pièces de 1/6 dans un rectangle complet. Maintenant qu'on sait qu'il y en a six en tout dans le rectangle, il en faut combien pour recouvrir 1/3 du rectangle ?
E1 :	(Il sépare le rectangle en six avec ses doigts.) Deux.

L'extrait montre également que ce n'est pas parce qu'un élève peut identifier $1/b$ d'une figure, et donc établir une relation de type partie/tout continu, qu'il a nécessairement établi la relation multiplicative $b \times 1/b = 1$. En effet, si l'élève peut identifier $1/6$ d'un rectangle⁷², il ne peut par ailleurs identifier le nombre de $1/3$ ou de $1/6$ dans 1.

- Décontextualisation liée au scénario 2 (OR1, OR2, AS)

À la suite du scénario 2, les élèves doivent compléter la liste suivante : $1/3 = ?/6 = ?/9 = ?/12 = ?/27 = 11/?$. Dans les groupes OR1 et OR2, les élèves ayant adopté la conduite C (E2 et E6) complètent la liste aisément. Pour soutenir leurs camarades en difficulté, ils décrivent leur démarche, ce qui permet aux autres élèves de compléter la liste. Dans le groupe AS, aucun élève ne réussit la tâche, même si le matériel utilisé pour la validation est encore sous leurs yeux, ce qui peut s'expliquer par la difficulté concernant la relation $a \times 1/b = a/b$. L'expérimentatrice fournit le premier numérateur manquant et formule une règle en s'appuyant sur la situation d'action qui a précédé : « On l'a fait tantôt. Pour avoir $1/3$, on a vu qu'il fallait 2 pièces de $1/6$. Dans le rectangle au complet, la pièce de $1/6$, elle entre 6 fois et dans le $1/3$ du rectangle, elle entre 2 fois. Vous pouvez l'écrire, $1/3$, c'est équivalent à $2/6$. » Les élèves complètent ensuite les fractions $?/9$ et $?/12$ en s'appuyant sur la rétroaction qu'ils ont reçue du milieu. Cependant, pour compléter la fraction $?/27$, l'élève E8 observe les numérateurs et complète selon une suite de naturels aux numérateurs : $1/3$, $2/6$, $3/9$, $4/12$, $5/27$. L'entrée sur cette tâche est d'autant plus difficile que les élèves ne connaissent pas les faits multiplicatifs de la table de 3. Il est possible que non seulement les faits multiplicatifs ne soient pas connus, mais que les structures multiplicatives elles-mêmes soient peu

⁷² On peut noter ici un décalage dans l'échange : alors que l'expérimentatrice demande combien de $1/6$ dans le rectangle, l'élève répond 1, c'est-à-dire en fonction de la tâche qu'il vient d'effectuer sous l'incitation de l'expérimentatrice, soit de colorier $1/6$.

développées, limitant ainsi l'accès à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur visée par cette situation. Notons que cette recherche de régularités strictement numériques, sans appui sur la phase d'action, peut également s'expliquer par la demande de l'expérimentatrice après le scénario 1, de rechercher ce que les fractions ont en commun.

- Scénario 3a (OR1, OR2, AS)

Au scénario 3a, les élèves doivent identifier $1/b$ à partir de a et de c/d , où $a = 2$. Les items traitent successivement des relations suivantes : $2 \times 1/b = 1/2$; $2 \times 1/b = 1/3$; $2 \times 1/b = 1/6$.

Dans le groupe OR1, l'élève E3 propose d'abord 2 pièces de $1/4$ pour ensuite proposer 2 pièces de « 4 sur 4 ». Comme le montre l'extrait suivant, elle formule correctement : « La demie de 4, c'est 2 et il faut remplir une demie. » Cependant, elle glisse rapidement sur la valeur du numérateur, peut-être pour bien marquer la partition en 4. L'élève E2, quant à lui, engage une interprétation partie/tout de la pièce $1/2$. Au numérateur, il place le nombre de parties à prendre, soit 2, et au dénominateur, le nombre de parties issues du partage égal de la demie à couvrir, soit 2 pour former « 2 sur 2 ». D'une part, l'élève perd de vue le tout de référence (conduite A) et, d'autre part, il associe le numérateur au nombre de parties prises. Du point de vue de l'élève, il faut 2 pièces de $1/2$ et, donc, il faut « 2 sur 2 » considérant que $2 \times 1/2 = 2/2$. Ainsi, la relation multiplicative, qui implique la réplique d'une fraction unitaire, telle que suggérée dans le bon de commande $2 \times 1/b = 2/b$ (2 pièces de ____), n'est pas respectée. L'intervention de l'expérimentatrice qui vise à confronter $2/2$ et 2 pièces de $2/2$ ne permet pas à l'élève d'ajuster sa solution.

Les élèves tentent de compléter l'énoncé suivant : *J'ai besoin de 2 pièces de ____ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.*

E3 : Deux pièces de $1/4$, ben de quatre sur quatre. (5 secondes) Je suis sûre que c'est quatre sur quatre parce que la demie de quatre c'est deux et il faut remplir une demie.

E2 : Moi je dis que c'est deux sur deux...

(...)

E2 : Si on sépare la partie A en deux, ça va faire deux pièces, et on a besoin des deux pièces, alors c'est deux sur deux. (3 secondes : l'élève regarde l'expérimentatrice en attendant sa réponse.)

EXP : Qu'est-ce que vous en pensez les autres ?

E3 : Ben j'suis pas sûre...

EXP : Qu'est-ce que vous voulez écrire sur le bon de commande ?
 E2 : Moi je dirais deux sur deux.
 EXP : Tu dirais qu'il faut deux pièces de $\frac{2}{2}$ du rectangle pour recouvrir $\frac{1}{2}$ rectangle (en pointant le bon de commande) ?
 (3 secondes)
 E2 : Oui.

Les propositions des élèves peuvent à première vue paraître étonnantes, mais notons que les élèves ne disent pas « quatre quarts » ou encore « deux demies », mais bien « quatre sur quatre » et « deux sur deux ». Ces conduites suggèrent que l'apprentissage des codes oraux et écrits des fractions ne découle pas d'une conception de la fraction. Il faut sans doute plutôt considérer que les formes écrites ou orales, produites par les élèves pour exprimer une fraction, participent de leur conception sur la fraction et des relations qu'elles expriment dans la situation traitée.

L'élève E2 adopte la conduite C dès le deuxième énoncé. Comme le montre l'extrait suivant, il a dégagé une régularité, mais sans nécessairement pouvoir la valider mathématiquement. En effet, l'élève, s'appuyant sur l'énoncé *2 pièces de $\frac{1}{4}$ du rectangle pour avoir $\frac{1}{2}$ rectangle*, dégage qu'on multiplie le nombre de pièces (2) par le dénominateur donné (2) pour identifier le dénominateur de la fraction recherchée, et il reproduit cette procédure pour identifier la fraction recherchée. Cependant, l'élève s'interroge sur le traitement numérique du numérateur (1) ne sachant pas comment l'intégrer à un calcul.

J'ai besoin de 2 pièces de _____ du rectangle pour recouvrir $\frac{1}{3}$ du rectangle.

E2 : Moi je dis $\frac{1}{6}$. Parce que j'ai regardé ici... (Il pointe le bon de commande.) Attends, je sais pas comment l'expliquer... (4 secondes) Je peux l'expliquer mais je sais pas si ça va être bon, parce que j'ai fait 2×2 ça donne 4 (en s'appuyant sur l'énoncé A : 2 pièces de $\frac{1}{4}$ du rectangle pour recouvrir $\frac{1}{2}$ rectangle), pis y manquait le 1, je pensais qu'il fallait additionner le 1, fait que j'ai bloqué un peu, mais là j'ai fait, 2×3 ça donne 6, c'est pour ça que j'ai dit $\frac{1}{6}$. Mais je sais pas trop le 1 il sort d'où.

L'élève E3, attentive aux explications de E2, capte et effectue la procédure mise en œuvre par E2. Ainsi, les élèves construisent une règle d'action qui est valide pour identifier la fraction recherchée, mais sans qu'il soit assuré qu'ils maîtrisent les relations engagées dans le calcul. Dans ce cas, le calcul semble court-circuiter la mise en œuvre des relations visées par la

situation. Les relations visées par la situation pourront cependant apparaître au moment de la validation.

Dans le groupe OR2, les deux élèves présentes, E5 et E6, partitionnent mentalement la figure (conduite B) pour compléter les deux premiers énoncés. Elles rencontrent les limites de cette stratégie lorsqu'elles doivent compléter le troisième énoncé en raison de la valeur de d qui augmente. L'élève E6 s'appuie sur les résultats obtenus précédemment, ce qui lui permet de dégager le calcul à effectuer (conduite C). Notre hypothèse est que E6, contrairement à E2 et E3 du groupe OR1, s'appuie sur les relations fractionnaires impliquées dans les deux premiers énoncés.

Dans le groupe AS, l'élève E7 participe peu, ce qu'on peut attribuer au fait que ce scénario est présenté en fin de période, d'autant plus que cet élève présente un déficit d'attention. Les nouvelles contraintes de ce scénario pourraient également contribuer au désinvestissement de l'élève. Pour compléter le premier énoncé, l'élève E9 adopte la conduite A et propose $1/2$. L'élève E8 partitionne mentalement la figure (conduite B) et ce faisant, obtient 4 parties; elle propose ainsi comme réponse numérique 4, et ensuite $2/4$. L'extrait suivant présente l'échange entre les deux élèves qui cherchent un consensus. L'échange est extrêmement riche et témoigne de plusieurs relations : 1) la partie à recouvrir, $1/2$, est différenciée du tout de référence, ce qui conduit à : 2) différencier « $1/2$ de 1 » et « $1/2$ de $1/2$ », ce qui conduit à : 3) établir la valeur de la pièce recherchée, soit $1/4$.

J'ai besoin de 2 pièces de ____ du rectangle pour recouvrir $1/2$ rectangle.

E9 : C'est quoi la moitié de ça ? (Elle fait une ligne avec son doigt pour séparer la partie A en deux.)

E8 : Quatre.

E9 : Deux, un sur deux.

E8 : Deux quarts.

E9 : Un sur deux.

E8 : Ben non, hen (en s'adressant à l'expérimentatrice) ?

EXP : Je vous laisse en discuter. Vous devez vous entendre sur la même réponse.

E9 : C'est la demie, regarde, c'est la demie de ça, c'est un sur deux.

E8 : Ça peut pas être $1/2$, c'est écrit ici ($1/2$ est écrit sur la partie A). (...) Fait que c'est quatre. Parce que ça c'est la demie, pis si on sépare en deux, c'est la demie encore, fait que c'est quatre.

E9 : Quatre ?

E8 : Regarde. (Elle dessine un rectangle au verso du bon de commande.) Ça, c'est la partie A. Fait que là t'as deux parties, une, deux. (Elle sépare le rectangle en deux et écrit 1 et 2.) Pis là, tu le resépars encore en deux, pis là on enlève ça parce que ça a pas rapport (elle barre le 1 et le 2 qu'elle avait écrit), fait que ça fait un, deux, trois et quatre (elle écrit 1, 2, 3, 4). Fait que t'as quatre morceaux.

E9 : Mais comment ça s'appelle cette moitié-là ?

E8 : Quatre.

E9 : Ben non ça se peut pas. Elle avait dit qu'il fallait chercher comment ça s'appelle ça (en montrant la moitié de la partie A), mais comment ça s'appelle ça ?

(3 secondes)

EXP : Qu'est-ce que t'en penses E7 ?

E7 : Je sais pas...

(3 secondes)

EXP : Est-ce que je vous aide pour la partie A, et ensuite vous faites les autres ?

E9 : Non, non, on va l'avoir, on va être bons, on va être bons.

E8 : T'as quatre morceaux pis t'en coloies deux, ça fait deux quarts.

E9 : Ben non parce qu'on veut juste savoir ça (en montrant la moitié de la partie A), on veut juste savoir cette demie-là.

EXP : Donc ce serait quoi si on veut juste savoir cette partie-là, elle représente quelle fraction du rectangle cette partie-là ?

E8 : Un...

E9 : On met deux quarts.

EXP : Vous avez besoin de deux pièces de deux quarts ou vous voulez deux quarts en tout ?

E8 : Non, c'est une demie... ou peut-être un quart...

E9 : Ah ! C'est la moitié d'une demie !

EXP : C'est ça, c'est la moitié d'une demie, ou on peut dire aussi un quart.

E8 : Ho ! J'ai raison !

EXP : Oui, la pièce qui entre quatre fois dans le tout, c'est un quart.

E8 : J'ai eu la bonne réponse !!!

Tout comme dans le groupe OR1, deux difficultés sont relevées : la modification du tout de référence (la partie à recouvrir est interprétée comme le tout de référence), et la confusion entre $\frac{2}{4}$ et 2 pièces de $\frac{1}{4}$, et ce, malgré l'institutionnalisation portant sur cette relation réalisée précédemment. Nous interprétons cette difficulté, d'abord, comme une prégnance de l'interprétation partie/tout. Ainsi, la fraction $\frac{2}{4}$ est associée à 2 parties sur 4 parties, ce dont l'élève a besoin pour recouvrir la demie. L'interprétation mesure par laquelle on peut établir que $\frac{2}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$, n'est pas spontanément dégagée, mais plutôt assimilée à l'interprétation partie/tout. Une interprétation complémentaire est que le registre oral (avoir besoin de « deux quarts ») ne favorise pas la différenciation entre l'interprétation partie/tout ($\frac{2}{4}$) et l'interprétation mesure sur laquelle repose le bon de commande dans le registre écrit (2 fois

1/4). Dans l'extrait ci-haut, l'intervention de l'expérimentatrice ne favorise pas la confrontation entre le code oral utilisé par l'élève (2/4) et la forme écrite exigée par le bon de commande, soit 2 pièces de 1/4 chacune.

Les élèves doivent ensuite compléter l'énoncé suivant : *J'ai besoin de 2 pièces de ____ du rectangle pour recouvrir 1/3 du rectangle.* L'élève E8 tente des réponses en regardant l'expérimentatrice : « 2 de plus ? Heu... 1 de plus ? 3 de plus ? 4 de plus ? » L'expérimentatrice les piste alors sur les relations multiplicatives à établir, en prenant appui sur le matériel : « Un tiers, c'est ce qui entre 3 fois dans le tout. Si l'on sépare la pièce de 1/3 en 2, cette partie-là, elle entre combien de fois dans le tout ? » L'élève E8 répond correctement (6), mais cette donnée ne permet ni à E8 ni aux autres élèves d'identifier que la partie correspond à 1/6 du rectangle. Cette difficulté témoigne de la difficulté des élèves du groupe AS concernant la relation $b \times 1/b = 1$. C'est finalement l'expérimentatrice qui, en s'appuyant sur le matériel, enseigne et fournit les solutions justes.

Considérant les difficultés des élèves à établir la relation $b \times 1/b = 1$ et à rappeler des faits multiplicatifs, des modifications sont apportées pour le groupe AS aux scénarios suivants.

- Scénario 3b (OR1, OR2)

Au scénario 3b, les élèves doivent identifier $1/b$ à partir de a et de c/d , où $a = 3$.

Dans le groupe OR1, E2 et E3 adoptent la conduite C dès le premier énoncé, et E1 ne se prononce pas. Dans le groupe OR2, E5 et E6⁷³ adoptent la conduite A lors du premier énoncé, mais adoptent la conduite C à partir du deuxième énoncé. Ainsi, bien que les exigences mathématiques soient plus élevées au scénario 3b qu'au scénario 3a, plus d'élèves adoptent la conduite C. En effet, elle est adoptée à quatre reprises au scénario 3a et à neuf reprises au scénario 3b.

⁷³ E4 est absente.

- Scénario 3 ajouté (AS)

Un scénario est ajouté pour le groupe AS visant à établir la relation suivante : $b \times 1/b = 1$. Les élèves doivent identifier le nombre de pièces correspondant à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir la figure entière. Si les élèves adoptent au premier énoncé de ce scénario la conduite B, dès le deuxième énoncé, la relation est établie correctement.

Du point de vue de l'expérimentatrice, le doute sur la compétence des élèves à établir la relation $1/b \times b = 1$ justifie l'ajout de ce scénario. Ce scénario sert, autrement dit, à s'assurer que les élèves maîtrisent une relation considérée « préalable » à l'apprentissage des relations visées par la situation 1. Les élèves n'ont d'ailleurs pas réussi d'emblée le premier énoncé. Ce scénario peut également avoir un effet non négligeable sur les élèves dans la mesure où il permet de cibler une relation essentielle pour cette situation. Cependant, la difficulté des élèves tient surtout, il nous semble, à l'articulation entre une partie $1/b$ et un tout, entre une partie c/d et un même tout, et entre $1/b$ et c/d .

- Décontextualisation liée au scénario 3 (OR1, OR2, AS)

Dans le moment de décontextualisation qui suit ce scénario, ces questions sont soumises aux élèves.

*Quelle fraction est 2 fois plus petite que $1/2$? Que $1/3$? Que $1/6$? Que $1/9$?
 Quelle fraction est 3 fois plus petite que $1/2$? Que $1/3$? Que $1/6$? Que $1/9$?
 Quelle fraction est 4 fois plus petite que $1/2$?*

Dans les trois groupes, les élèves ont d'abord du mal à répondre, ce qui peut s'expliquer par la manière dont les questions sont posées. En effet, comme nous le mentionnions dans l'analyse *a priori*, ces questions font appel aux relations scalaires pour comparer des fractions, se différenciant ainsi de la situation d'action. L'expérimentatrice s'appuie alors sur les relations établies aux scénarios 3a et 3b, ce qui permet rapidement aux élèves des groupes OR1 et OR2 d'établir la relation entre « ce qui entre a fois dans c/d » et « ce qui est a fois plus petit que c/d ». Dans le groupe OR1, l'élève E2 établit de plus la relation avec le calcul $c/d \div 2$. Un objet de savoir non prévu est ainsi investi. L'expérimentatrice profite de cette

proposition pour introduire la division d'une fraction par un entier. Ainsi, $1/2 \div 2$ est présentée comme une écriture mathématique convenable pour rechercher ce qui est 2 fois plus petit que $1/2$ ou ce qui entre 2 fois dans $1/2$. Un élève dégage alors la règle qu'il faut multiplier le dénominateur par 2 pour trouver la fraction recherchée.

Les élèves du groupe AS mettent beaucoup plus de temps à interpréter correctement la relation « 2 fois plus petit que $1/b$ » que les élèves des groupes OR. Par exemple, dans l'extrait suivant, l'expression « 2 fois plus petit que $1/4$ » est interprétée comme « 2 fois $1/4$ ». L'expérimentatrice réagit en coloriant les $2/4$ d'un rectangle et rappelle l'équivalence de $2/4$ et de $1/2$. Elle relance alors sur l'expression « 2 fois plus PETIT que $1/4$ ». L'élève E7 choisit alors de diviser le dénominateur de $1/4$ par 2 et propose « un deuxième ». La manière de nommer la fraction témoigne du traitement numérique opéré par l'élève et non d'une représentation imagée de la demie. À nouveau, l'expérimentatrice réagit en illustrant que $1/2$ est 2 fois plus grand que $1/4$. Elle invite les élèves à considérer la moitié de $1/4$; les élèves ont du mal à se référer à l'entier pour identifier $1/8$. Après plusieurs interactions, E9 arrive à identifier $1/8$ en dénombrant, mentalement, que la demie de $1/4$ entre 8 fois dans l'entier. Encore une fois, on peut relever la difficulté des élèves à articuler deux référents (l'entier et la fraction $1/2$) simultanément ainsi que les différents niveaux de relations multiplicatives à établir ($1/4$ de 1, $1/2$ de $1/4$, $1/8$ de 1).

EXP : Qu'est-ce qui est deux fois plus petit que $1/4$?

E9 : Deux quarts.

EXP : Qu'est-ce qui est deux fois plus petit... Regardez, ça ici c'est $1/4$ de ce rectangle-ci hen (en s'appuyant sur le matériel). Deux quarts, c'est deux fois la pièce de $1/4$. Donc pour hachurer $2/4$ du rectangle, je dois prendre un autre $1/4$. Deux quarts, c'est ça ici. (Elle hachure $2/4$ du rectangle.) Deux quarts, c'est deux fois plus grand que $1/4$. Mais ce qu'on demande ici, c'est qu'est-ce qui est deux fois plus PETIT que $1/4$?

(3 secondes)

E7 : Un deuxième.

EXP : Un deuxième, tu veux dire un sur deux ? Un sur deux, on dit une demie, et une demie, c'est équivalent à $2/4$. Une demie, ce serait ça ici (en montrant sur le rectangle), c'est ce qui entre deux fois dans le rectangle... Une demie, c'est deux fois plus grand que $1/4$. Pour savoir ce qui est deux fois plus petit que $1/4$, regardez ce qu'on peut faire. Ici, on a $1/4$, ça c'est $1/4$ du rectangle, si on le plie en deux (elle plie la pièce de $1/4$ en deux), ce qu'on obtient ici c'est deux fois plus petit que $1/4$, mais ça ici (en montrant la pièce de $1/4$ pliée en deux), ça représente quelle fraction du rectangle ?

E9 : Un sur deux.

EXP : Ça ici, c'est la moitié d'un quart, mais ça représente quelle fraction du rectangle

complet ? (2 secondes) Comment on peut faire pour savoir ?

E7 : Un sur quatre.

EXP : Un sur quatre, un quart, c'est la pièce ici, cette pièce-là représente un quart du rectangle parce qu'elle entre quatre fois dans le rectangle. Quand je la plie en deux, cette partie-là ici, elle représente quelle fraction du rectangle complet ?

E7 : Un sur six ?

EXP : Pour le savoir, on va regarder combien de fois ça entre dans le rectangle.

E9 : Ah ! Un sur huit !

EXP : Un sur huit, un huitième, comment t'as fait pour le savoir ?

E9 : J'ai fait un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit (elle prend la pièce et montre qu'elle entre huit fois dans le rectangle).

L'expérimentatrice poursuit en demandant ce qui est 2 fois plus petit que $1/3$ et les trois élèves font une prévision inexacte. L'expérimentatrice reprend alors la même démarche que celle mise en œuvre avec $1/4$. Les résultats sont notés. Pour identifier ce qui est « 2 fois plus petit que $1/6$ », les élèves observent les résultats obtenus, ce qui leur permet de faire une prévision juste. La vérification de leur anticipation est réalisée à l'aide du matériel. Enfin, les dernières questions sont traitées numériquement et efficacement.

- Scénario 4 (OR1, OR2)

Au scénario 4, la forme de la figure est un pentagone, et les valeurs numériques des trois énoncés sont les suivantes : $a \times 1/10 = 1/5$; $a \times 1/10 = 2/5$; $a \times 1/20 = 2/5$.

Dans le groupe OR1, l'élève E2 répond $1/2$ au premier énoncé sans doute pour marquer que $1/10$ est la moitié de $1/5$. Il recourt ensuite, tout comme les deux autres élèves, à la conduite B. Les élèves E1 et E3 réussissent à compléter adéquatement les deux premiers énoncés en recourant à la conduite B. Il est possible que la solution de l'énoncé B s'appuie sur celle de l'énoncé A puisqu'ils relèvent d'une même partition (combien de $1/10$ dans $1/5$ et $2/5$). Au troisième énoncé, les élèves rencontrent les limites de la conduite B ; ils n'arrivent pas à partitionner le pentagone en 20 parties égales. L'aide apportée par l'expérimentatrice conduit E2 à adopter une stratégie numérique. Cependant, les questions de l'expérimentatrice reposent sur les stratégies qu'elle juge utiles pour solutionner le problème. Ainsi, elle demande : « Qu'est-ce qui est plus grand : $1/10$ ou $1/20$? » Cela permet à E2 de s'appuyer sur le résultat établi au deuxième énoncé pour trouver la solution du troisième énoncé.

Dans le groupe OR2⁷⁴, E5 rencontre les limites de la conduite B dès le premier énoncé. L'élève E6 recourt quant à elle à la conduite C (parfois avec le soutien de l'expérimentatrice) pour compléter les trois énoncés. Lors du deuxième énoncé, l'expérimentatrice pilote fortement les échanges jusqu'à l'obtention de la solution et invite les élèves à valider. Les élèves apprécient particulièrement procéder à la validation dans les moments où la solution est obtenue dans le cadre d'un pilotage très serré de la part de l'expérimentatrice. Ce n'est pas tant un processus de validation de la solution qu'un processus qui permet de dégager ce qui fonde le résultat.

Les valeurs des variables de ce scénario visent à rendre inefficace la conduite B. Les contraintes de la tâche, la figure pentagonale et les nombres, en particulier $a \times 1/20 = 2/5$, semblent cependant la favoriser. La conduite B est effectivement mise en œuvre par plus de la moitié des élèves des groupes OR1 et OR2 (énoncé A : 3/5; énoncé B : 4/5; énoncé C : 3/5). Nous formulons l'hypothèse que les conduites B et C ne s'excluent pas nécessairement. En effet, la manifestation d'une conduite C peut s'accommoder, chez les élèves, d'une coordination avec la conduite B, permettant ainsi de se représenter la partition mentale qui correspond aux relations numériques établies. De même, la manifestation d'une conduite B peut s'accompagner d'un certain contrôle des relations numériques engagées dans la partition mentale de la figure. Une conduite strictement numérique exigerait de contrôler les faits multiplicatifs permettant d'établir les relations numériques mais également l'abstraction des contraintes « figurales » auxquelles se rapporte la tâche. Autrement dit, il faut pouvoir considérer que la relation numérique peut s'appliquer à toutes situations de partition qui engagent les mêmes nombres. Les scénarios qui précèdent le scénario 4 n'offrent sans doute pas les conditions (et donc l'expérience) suffisantes pour procéder à cette abstraction.

- Scénario 4 ajouté (OR2)

Comme il a été mentionné précédemment, un scénario est ajouté dans le groupe OR2 avant de procéder au dernier scénario. Rappelons que ce scénario est présenté au début de la

⁷⁴ E4 est absente.

deuxième séance et que E4 était absente à la première séance. Les relations traitées sont les suivantes : $a \times 1/9 = 1/3$ et $a \times 1/6 = 2/3$.

Au premier énoncé, l'élève E4 répond 9, interprétant c/d comme le tout de référence. Elle comprend rapidement son erreur et adopte ensuite la conduite C. Cependant, elle identifie le nombre de $1/6$ pour recouvrir $1/3$ (effet pérenne du premier énoncé) plutôt que $2/3$. Encore une fois, elle comprend rapidement son erreur au moment de la validation. L'élève E5 recourt quant à elle à la conduite B pour compléter le premier énoncé et, étant donné la rapidité avec laquelle les élèves de son groupe répondent au deuxième énoncé, elle n'a pas le temps de se prononcer. L'élève E6 complète rapidement les deux énoncés en recourant à la conduite C.

Enfin, le scénario ajouté a permis à E4, qui était absente aux scénarios précédents, de s'approprier le fonctionnement et les enjeux mathématiques de la première situation.

- Scénario 5 (OR1⁷⁵, OR2)

Les relations traitées dans le dernier scénario sont les suivantes : $a \times 1/12 = 1/3$; $a \times 1/20 = 1/5$; $a \times 1/10 = 2/5$; $a \times 1/30 = 1/15$. Ce scénario se différencie des précédents, car le travail se fait strictement sur le plan numérique. En effet, les élèves ne disposent d'aucun matériel; ils ne peuvent donc pas adopter la conduite B.

Les contraintes de ce scénario conduisent trois des cinq élèves à recourir à la conduite C pour au moins une des quatre relations numériques proposées. En effet, les élèves E2 et E6 utilisent une stratégie numérique, et ce, sans l'aide de l'expérimentatrice, pour identifier avec justesse le résultat des quatre énoncés. L'élève E4, quant à elle, ne se prononce pas au moment d'anticiper le résultat du premier énoncé, mais est attentive à ce que produit E6, ce qui lui permet de dégager la relation entre $1/b$ et c/d et d'adopter la conduite C aux deuxième et troisième énoncés. Cependant, au dernier énoncé, comme le résultat aux trois premiers énoncés est 4, elle anticipe que le résultat sera de 4, sans rechercher la relation entre $1/b$ et c/d . Les nouvelles contraintes provoquent toutefois un blocage chez les deux autres élèves, E1 et E5, qui n'arrivent tout simplement plus à faire de prévisions.

⁷⁵ E3 est absente.

Au scénario 4, les contraintes ont suscité des conduites de type B, ce qui n'est plus le cas au scénario 5, alors que le milieu didactique ne comporte que des écritures mathématiques, rendant ainsi nécessaire le recours à la conduite C. Au dernier scénario de la situation, deux élèves, E1 et E5, ne peuvent toujours pas fonctionner sans s'appuyer sur du matériel. Ainsi, pour ces élèves, il est possible que les relations mathématiques travaillées dans cette situation n'aient pas encore fait l'objet d'une abstraction. Les relations ne sont pas dégagées du matériel. Ce n'est pas tant que les élèves n'adoptent pas la conduite C qui nous permet de formuler cette hypothèse, mais le fait que, pour ces élèves, le matériel semble être ce par quoi ces relations existent.

- Décontextualisation liée au scénario 5 (OR1, OR2)

Les élèves doivent finalement compléter une liste de fractions équivalentes à $1/5$ et une autre, à $4/5$. C'est particulièrement la liste de fractions équivalentes à $4/5$ qui pose problème. Pour soutenir le travail mathématique des élèves, l'expérimentatrice les amène à s'appuyer sur la liste de fractions équivalentes à $1/5$ déjà produite. Lorsque cela est insuffisant, elle dessine une figure partagée également en 5 parties pour favoriser la conduite B comme stratégie de production de fractions équivalentes à $4/5$. Ces interventions sont cependant insuffisantes pour aider l'élève E1. Il est utile de rappeler que la fraction $4/5$ n'a jamais été introduite dans les scénarios précédents. Le choix de cette fraction visait à ce que les élèves s'appuient sur la suite des fractions équivalentes à $1/5$ pour produire celle des fractions équivalentes à $4/5$ sans se référer à des résultats déjà obtenus.

7.2 Analyse de la situation sur la fraction en tant que mesure

La deuxième situation vise d'une part à ce que les élèves recourent à des fractions pour exprimer la longueur d'un segment et à ce qu'ils établissent la relation suivante : 1) $n + a/b = (nb + a)/b$ (ex. : $1 + 2/3 = 5/3$). D'autre part, elle vise à ce qu'ils établissent la relation suivante : $a \times 1/b = a/b$, la fraction a/b étant un nombre naturel ou équivalent à une fraction c/d , où b est un multiple de d (ex. : $6 \times 1/8 = 3/4$). Cette situation comporte deux scénarios.

Le scénario 1 repose sur un jeu de communication dans lequel les élèves doivent formuler un message qui exprime la longueur d'un segment. Au scénario 2, les élèves doivent construire un segment dont la longueur est soit entière, soit fractionnaire. Des énoncés de problème impliquant diverses mesures de grandeurs (heures, kilogrammes, litres) sont finalement présentés de manière à favoriser la décontextualisation des connaissances.⁷⁶

Comme nous le verrons dans l'analyse des conduites d'élèves, la situation d'action est relativement bien contrôlée par les élèves. Cependant, les relations mathématiques qui modélisent les actions, et donc la mise en relation entre $a \times 1/b$ et a/b , sont difficiles à établir. Notons que tout comme lors de la première situation, cette difficulté est particulièrement prégnante pour les élèves du groupe AS.

7.2.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes

Le tableau 7.4 présente les activités réalisées auprès de chacun des groupes d'élèves ainsi que le temps accordé à chacune d'elles. Dans l'ensemble, le temps consacré à la deuxième situation est plus important dans le groupe AS (152 minutes 20 secondes) que dans les groupes OR (122 minutes dans le groupe OR1 et 132 minutes et 35 secondes dans le groupe OR2). Dans les trois groupes, un peu plus de 30 minutes sont consacrées au scénario 1 et environ une heure est accordée au scénario 2.

⁷⁶ Le lecteur peut se référer à la section 5.2.2 du chapitre V (p. 104-112) pour obtenir une description plus détaillée de la deuxième situation.

Tableau 7.4

Répartition du temps de chacune des activités de la situation 2 pour les trois groupes d'élèves

SCÉNARIOS ET MOMENTS DE DÉCONTEXTUALISATION	OR1	OR2	AS
Scénario 1			
Tâche A (premier segment)	12 min 45 s Fin séance 2	11 min 15 s	18 min 10 s
Tâche B (deuxième segment)	8 min	7 min Fin séance 2	15 min 10 s Fin séance 2
Tâche C (troisième segment)	12 min 15 s	13 min 35 s	x
Scénario ajouté en AS	x	x	21 min 20 s
Scénario 2			
Tâche ajoutée ($x = 1$)	x	x	11 min 10 s
Tâche A ($x = 1/2$)	x	x	6 min 15 s
Tâche B ($x = 3/4$)	12 min 55 s	12 min 10 s	12 min 35 s Fin séance 3
Tâche C ($x = 2$)	6 min 30 s Fin séance 3	9 min 15 s	14 min
Décontextualisation (tâche C)	8 min 40 s	14 min Fin séance 3	17 min 40 s
Tâche D ($x = 3/2$)	5 min 50 s	7 min	x
Décontextualisation (tâche D)	15 min 20 s	13 min	x
Décontextualisation ajoutée	9 min 20 s	7 min 55 s	x
Énoncés de problème Énoncés adaptés pour le groupe AS	Fin séance 4* 30 min 25 s	Fin séance 4* 37 min 25 s	Fin séance 4* 36 min
Total	122 min	132 min 35 s	152 min 20 s

* Dans les trois groupes, les énoncés de problème sont amorcés à la fin de la séance 3 et leur présentation se poursuit au début de la séance 4.

Diverses modifications ont été apportées à cette situation. Au scénario 1, aucune modification n'a été apportée au scénario prévu pour les groupes OR, mais seulement deux des trois tâches prévues ont été réalisées dans le groupe AS. Étant donné qu'il n'y pas d'évolution, dans ce groupe, entre les conduites adoptées entre les deux premières tâches du scénario 1, un scénario est ajouté entre les scénarios 1 et 2 dans le but d'aider les élèves à interpréter les

fractions en tant qu'unités de mesure. Pour ce faire, le rôle des élèves et celui de l'expérimentatrice sont inversés : l'émetteur du message numérique est l'expérimentatrice et les élèves sont les récepteurs. Il leur revient donc à interpréter un message numérique pour construire un segment. La validation se fait par superposition, sur transparents, des segments dessinés par les élèves et du segment initial. À la suite de cette activité, les élèves sont appelés à comparer deux mesures de segment. La validation est assurée par le traçage des segments.

Au scénario 2, visant à présenter des tâches adaptées aux connaissances des élèves, les tâches présentées dans le groupe AS et dans les groupes OR diffèrent : 1) une tâche en début de scénario est ajoutée pour le groupe AS ; 2) le scénario débute avec la tâche B dans les groupes OR ; 3) la tâche D n'est pas présentée dans le groupe AS.

Enfin, sur les 13 activités réalisées lors de la deuxième situation, les groupes AS et OR n'ont en commun que 5 d'entre elles impliquant les mêmes données numériques.

7.2.2 Validation interne de la deuxième situation

Les scénarios 1 et 2 mettant en jeu des problèmes de natures différentes, les conduites anticipées sont donc différentes pour chacun d'eux.

7.2.2.1 Scénario 1

Au scénario 1, quatre conduites sont anticipées dans l'analyse *a priori* pour mesurer un segment à partir d'une bande-unité.

Conduite A : Plier la bande-unité pour obtenir une « portion » de la bande-unité qui entre n fois dans le segment. Le message est une description des actions de pliage et de reports à effectuer.

Conduite B : Reporter la bande-unité sur le segment autant de fois que possible et évaluer approximativement la mesure de la partie fractionnaire restante du segment. Le message est numérique.

Conduite C : Plier la bande-unité pour identifier la fraction $1/n$ qui entre n fois dans le segment. Le message numérique spécifie la mesure du segment en nombre de reports de $1/n$.

Conduite D : Reporter la bande-unité sur le segment autant de fois que possible, plier la bande-unité pour identifier la mesure de la partie fractionnaire restante du segment. Le message numérique spécifie la mesure du segment en nombre fractionnaire.

Comme le montre le tableau 7.5, les élèves du groupe AS (E7, E8 et E9) adoptent la conduite A pour les deux premiers segments. Ainsi, aucune évolution de leurs conduites n'est observée dans les messages formulés. Cependant, il y a progression dans les stratégies adoptées par les élèves des groupes OR1 et OR2. En effet, alors qu'ils adoptent d'abord des conduites inefficaces, ils recourent ensuite aux conduites B et D, faisant appel à une interprétation de la fraction en tant que mesure.

Tableau 7.5
Conduites adoptées par les élèves à chacun des messages formulés
pour les trois segments du scénario 1 de la situation 2

Messages produits pour chacun des segments		Conduites adoptées à chacun des messages formulés						
		Conduite A	Conduite B	Conduite C	Conduite D	Autres conduites	Aucune prévision	Élève absent
2 1/2 b-u	1 ^{er} OR1, OR2, AS	E7, E8, E9				E2, E4, E5, E6	E1	E3
	2 ^e OR1, OR2, AS	E7, E8, E9				E2, E4, E5, E6	E1	E3
	3 ^e OR1, OR2				E2	E4, E5, E6	E1	E3
	4 ^e OR2		E4, E5			E6		
2 1/4 b-u	1 ^{er} OR1, OR2, AS	E7, E8, E9	E2, E3, E4		E5, E6		E1	
1 2/3 b-u	1 ^{er} OR1, OR2		E2, E3, E4, E5, E6				E1	
	2 ^e OR1, OR2				E2, E3, E4, E5, E6		E1	

Légende

b-u : bande-unité

L'analyse qui suit porte sur les conduites adoptées par les élèves pour chacune des trois tâches (qui correspondent aux trois segments) ainsi que sur le moment de décontextualisation qui lui est associé.

- Tâche A : segment de 2 1/2 bandes-unités (OR1, OR2, AS)

Pour produire un message permettant à l'expérimentatrice de tracer un segment de la même longueur que le leur, les élèves de chacun des groupes OR adoptent des conduites inefficaces et non prévues à l'analyse *a priori*, alors que les élèves du groupe AS adoptent la conduite A.

Dans le groupe OR1, seuls les élèves E1 et E2 sont présents, et l'élève E1 agit essentiellement en tant qu'observateur. Il y a donc peu d'échange entre les élèves. Pour produire le premier message, E2 reporte 2 fois la bande-unité sur le segment en laissant des traces du report. Lors du troisième report, il marque d'un trait la demie de la bande-unité. Il reporte à nouveau la bande-unité marqué du trait à la demie et laisse des traces de chaque demi-bande sur le segment; le segment est donc partagé en 5 parties égales. Il écrit $1/5$ sur le bon de commande. L'élève, cherchant une unité plus grande que la partie, semble ainsi revenir à l'interprétation partie/tout. Le segment devient ainsi le tout de référence et la demi-bande, qui correspond à $1/5$ du segment, la partie à considérer. Ce message ne permettant pas une réussite, cet élève fait une nouvelle tentative. Au deuxième message, il plie la bande-unité en 4 parties égales. Il reporte à nouveau la bande-unité partagée en 4 sur le segment et laisse des traces de chaque quart de bande sur le segment : le segment est alors partagé en 10 parties égales. Il écrit $1/10$ sur le bon de commande. Au troisième message, les questions de l'expérimentatrice, et sans doute également les mesurages successifs réalisés précédemment, conduisent E2 à une réussite. En effet, comme le montre l'extrait suivant, l'intervention de l'expérimentatrice permet finalement à cet élève de formuler un message en fonction du nombre de reports de la bande-unité sur le segment.

Pendant 7 secondes, E2 manipule la bande et semble chercher un message à formuler, et E1 l'observe.

EXP : Quand vous mesurez le segment avec la bande-unité, vous la répétez combien de fois la bande-unité au complet ? (5 secondes) Tantôt, tu as fait ça E2, tu as pris la bande, tu as regardé combien fois il fallait répéter la bande pour obtenir la longueur du segment. (E2 prend la bande-unité et la place vis-à-vis le segment.)

E2 : Elle entre deux fois... plus la moitié d'une fois.

EXP : Et si tu m'écrivais ça, tu crois que ça fonctionnerait ?

E2 : Ha!!!! Ben oui ! (Il écrit sur le papier « $2 \frac{1}{2}$ ».)

EXP : Est-ce que tu penses que ça va marcher toi E1 ?

E1 : Oui.

Notons que l'élève E1, bien qu'il ne fasse pas de prévisions, observe E2 et tente de comprendre ce qu'il fait. L'élève E1 se dit incertain des deux premiers messages formulés par E2, tandis qu'au troisième message, alors que la prévision est juste, il approuve le choix de E2.

Il est intéressant de noter qu'au cours de cette tâche ni E1 ni E2 ne sollicitent l'aide de l'expérimentatrice. La situation de communication semble favoriser, implicitement, la mise en place d'un contrat dans lequel l'élève est autonome. Autrement dit, même si l'expérimentatrice est présente, les élèves ressentent la responsabilité de solutionner la tâche.

Dans le groupe OR2, les élèves mesurent d'abord la bande-unité à l'aide du segment. Elles évaluent à tort que la bande-unité entre 3 fois dans le segment et écrivent « la bande mesure $1/3$ ». Ainsi, c'est le segment qui est utilisé comme unité de mesure. Nous faisons l'hypothèse que le choix du segment comme unité de mesure plutôt que de la bande repose sur une conception de la fraction en tant que partie d'un tout. Comme le segment est plus grand que la bande, la bande est considérée comme la partie et le segment devient le tout de référence. Lors du deuxième message, les élèves E4 et E5 reportent la bande-unité sur le segment et évaluent approximativement que la partie restante du segment correspond à $1/2$ de la bande, sans ressentir la nécessité de la plier. L'élève E4 propose d'écrire 2,5. L'élève E6 n'est pas d'accord avec ce message, car, ayant dégagé l'intention didactique, elle souhaite recourir aux fractions. Elle cherche quant à elle un message écrit en sixièmes. Étant donné le désaccord entre les élèves, l'expérimentatrice permet à E6 de formuler son propre message⁷⁷. Cette décision, prise sur le vif, a levé la contrainte prévue initialement, soit celle d'obtenir un accord entre les trois élèves pour formuler un seul message. Cet accord visait la formulation d'arguments pour valider et invalider les propositions d'autres élèves.

L'élève E6 choisit d'écrire $5/6$ comme message. Cette mesure est issue d'un mesurage efficace du segment avec la bande-unité reportée $2 \frac{1}{2}$ fois. L'élève reconstruit cependant une unité de référence en considérant le nombre de demies dans trois bandes-unités, soit 6. Le segment mesure ainsi, selon cette interprétation, $5/6$. En fait, le segment mesure $5/6$ de 3 bandes-unités : $5/6 \times 3 = 15/6$ ou encore $2 \frac{1}{2}$. La figure 7.1 témoigne du raisonnement de E6. Nous verrons qu'au deuxième message, E6 proposera $5/6 \times 5$, et au troisième message, $5 \times 1/6$. Il semble que cette dernière proposition désigne la réplique de $1/6$, 5 fois. Cette écriture évoque aussi la relation $a \times 1/b = a/b$, travaillée au cours de la première situation.

⁷⁷ Une tension et des attitudes malveillantes entre les élèves justifient du point de vue de l'expérimentatrice une telle décision.

Segment à mesurer					
Bande-unité		Bande-unité		1/2 bande-unité	1/2 bande-unité
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
5/6					1/6

Figure 7.1 : Raisonnement de E6 conduisant à la mesure $5/6$ à la tâche A du scénario 1 de la deuxième situation

Les élèves E4 et E5 formulent correctement à l'oral la mesure du segment, soit $2,5$ ou $2 \frac{1}{2}$. Or, de manière étonnante, E4 écrit : « $2/3$ et $1/2$ ». Il est possible que cette écriture soit une résultante de deux épisodes d'échange qui précèdent. D'abord, celui où E6, jugée forte en mathématiques par E4 et E5, soutient qu'il faut formuler un message sous forme fractionnaire. Ensuite, le choix d'écrire non pas 2 mais $2/3$ vient peut-être de la première réponse fournie, soit $1/3$.

Au troisième message, de nouvelles conduites imprévues surgissent. L'élève E4 constate, à l'œil, que le segment tracé par l'expérimentatrice, sur la base du message « $2/3$ et $1/2$ », correspond environ à la moitié du segment désiré. Elle propose alors d'ajouter « $\times 2$ » au message initial. Elle précise à l'expérimentatrice que le « $\times 2$ » s'applique à l'expression « $2/3$ et $1/2$ » et pas seulement à « $1/2$ ». L'élève E5 est d'accord avec le message formulé par E4. La rétroaction favorise dans ce cas une adaptation du message et non de la stratégie sur laquelle ce message est fondé. Par effet de contagion sans doute, l'élève E6 ajoute « $\times 5$ » à son message initial ($5/6 \times 5$) voyant que le segment produit par l'expérimentatrice n'est pas suffisamment grand. Enfin, lors du quatrième message, les élèves E4 et E5 écrivent $2 \frac{1}{2}$ bandes-unités, revenant à leur suggestion initiale. E6 écrit $5 \times 1/6$. Comme le montre l'extrait suivant, une discussion est alors amorcée autour de l'écriture $5 \times 1/6$, ce qui conduit à :

- 1) traiter la relation $a \times 1/b = a/b$;
- 2) établir la relation $6/6 = 1$;
- 3) formuler un nouveau problème : $?/6 = 2 \frac{1}{2}$.

EXP : Est-ce que vous pensez que ça va fonctionner le message de E6 ? Elle a écrit $5 \times 1/6$.
 E4 : Ben moi je pense que ça fonctionnera pas parce que c'est la même affaire que $5/6$.
 E5 : Ben moi je pense que c'est plus que $5/6$ parce que tu vas le plier en six, tu vas en prendre un, pis après à côté, tu le plies encore en six et tu en prends un...
 EXP : Cinq fois $1/6$, tu as raison E4, c'est la même chose que $5/6$. On peut faire comme ça, cinq fois $1/6$. (Elle prend la bande, trace $1/6$, reporte la même bande à côté, prend $1/6$, cinq fois.) Ou, étant donné que toutes les parties dans ma bande correspondent à $1/6$, on peut aussi faire comme ça, un, deux, trois, quatre, cinq. (Elle place la bande et prend cinq parties.) Ça revient au même, $5 \times 1/6 = 5/6$ (elle l'écrit).
 E6 : Ben je sais pas comment le dire ce que je veux dire.
 E5 : Peut-être que ça marche juste pas en sixièmes.
 E6 : Oui ça marche en sixièmes.
 EXP : Bonne question, est-ce que c'est possible d'écrire un message en sixièmes qui va permettre de tracer un segment de cette longueur-là ?
 E4 : Je penserais pas.
 E5 : Non parce que déjà quand tu prends six sur cinq, ben cinq sur six, ça donne ça... Fait que si tu prends six sur six, ça fonctionne pas.
 E4 : Six sur six, ce serait la longueur d'une bande... Fait que ça fait 15 sur 18...⁷⁸
 EXP : On va regarder ça ensemble.
 (L'expérimentatrice produit, avec l'aide des élèves, les messages $2 \frac{3}{6}$ et $15/6$ en utilisant les bandes.)

Au terme de la situation, l'élève E6 s'exclame : « C'est parce que eux, ils disaient point cinq ! », rappelant ainsi la première proposition donnée à l'oral de E4 et E5. Ce commentaire conduit l'expérimentatrice à investir un savoir non prévu. Elle relance ainsi les élèves : « C'est une bonne question ça... Est-ce que 2,5, ce serait un bon message ? Est-ce que c'est équivalent à ces écritures-là (en montrant $15/6$, $2 \frac{3}{6}$ et $2 \frac{1}{2}$) ? » Les élèves en discutent, et l'expérimentatrice explique finalement l'équivalence de 2,5 et $2 \frac{5}{10}$.

Dans le groupe AS, les élèves utilisent la bande-unité, la plient en deux et reportent la moitié de la bande-unité sur le segment. Or, étant donné leur manque de précision, le report de 5 fois la demi-bande ne permet pas d'épuiser le segment. Ils décident donc de plier la bande-unité en 4, ce qui est une adaptation adéquate de la conduite, mais encore une fois, l'imprécision ne leur permet toujours pas d'épuiser le segment. Lorsque les élèves plient la bande-unité en 8 et qu'ils reportent la partie correspondant à $1/8$ de la bande-unité 20 fois, il n'y a pas de reste.

⁷⁸E4 semble ici réinterpréter la réponse de E6 en associant $5/6$ à la fraction $15/18$, sans doute pour exprimer que la bande-unité a été répliquée trois fois.

Ils envoient comme message : « Plier le papier en 8 morceaux. » Au deuxième message, ils utilisent le premier message et ajoutent qu'il faut prendre « 20 petits morceaux comme ça », ce qui conduit l'expérimentatrice à dessiner un segment de la même longueur que le leur. L'expérimentatrice interroge alors les élèves : « Comment on peut écrire ça en mathématiques qu'il faut répéter 20 fois cette partie-là ici ? » Devant l'impasse des élèves à répondre, elle procède à une institutionnalisation dans laquelle la relation entre leur message, l'opération $20 \times 1/8$ et la fraction $20/8$ est établie.

Soulignons qu'une des conditions didactiques retenues pour le pilotage de la séquence n'a pas été respectée ici par l'expérimentatrice. Selon cette condition, un soutien doit être apporté aux élèves dans la mise en œuvre d'une stratégie adéquate de manière à favoriser une rétroaction rapide et efficace. Notons, par ailleurs, que l'élève E8 éprouve des difficultés à bien comprendre l'enjeu de la communication au moment de formuler un message : « Ben là, ça va être ben trop facile si on dit toute ! (...) Elle va le trouver en deux secondes ! » Elle semble ainsi croire qu'elle joue contre l'expérimentatrice. Un élève répond alors qu'ils sont « dans la même équipe ». L'expérimentatrice profite de cet échange pour rappeler les règles du jeu.

- Décontextualisation liée à la tâche A (OR1, OR2, AS)

Une fois que les élèves ont trouvé la mesure du premier segment, l'expérimentatrice procède à un moment de décontextualisation par un pilotage de questions entre les messages formulés et des contre-propositions. Dans les groupes OR, les élèves doivent comparer les mesures $2 \frac{1}{2}$ bandes-unités et 5 « moitiés » de la bande-unité. Dans le groupe OR1, alors qu'un élève (E2) associe 5 moitiés à $5 \div 2$, l'équivalence entre $5 \div 2$ et $2 \frac{1}{2}$ est confirmée par le recours à la calculatrice. Ainsi, deux objets de savoir non prévus sont investis, soit la relation entre la fraction et la division ainsi que la relation entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale (puisque le résultat qu'affiche la calculatrice est 2,5). Dans le groupe OR2, les élèves reconnaissent l'équivalence entre 5 moitiés et $2 \frac{1}{2}$, mais elles n'établissent pas l'équivalence entre 5 moitiés et l'écriture $5/2$. L'extrait suivant montre que la relation multiplicative $a \times 1/b$, comme la réplique de $1/b$, a fois, est maîtrisée par les élèves. Toutefois, cette relation

n'est pas encore associée à l'écriture a/b lorsque $a > b$. Rappelons cependant que la fraction impropre n'a pas encore été un enjeu mathématique de la séquence.

EXP : Cinq moitiés de bande, comment on écrit ça en mathématiques ?
 E4 : Ben comme ça. (Elle pointe $2 \frac{1}{2}$.)
 EXP : Ça c'est deux et une demie, c'est équivalent à cinq moitiés, mais est-ce qu'on peut écrire ça en mathématiques, cinq moitiés, ou cinq demies ?
 (E5 prend le crayon.)
 E5 : Ben tu fais cinq et une demie bande (elle écrit $5 \frac{1}{2}$).
 E4 : Ben non, là t'as fait cinq bandes et une demie.
 EXP : Cinq moitiés, et cinq et une demie, est-ce que c'est la même chose ?
 E4 : Non.
 EXP : Non, c'est pas la même chose. Cinq moitiés de la bande, ça veut dire que je répète cinq fois la moitié de la bande, comme ça... Et cinq bandes et une demie, ça veut dire que je répète cinq fois la bande entière (elle le fait) et ensuite, j'ajoute $\frac{1}{2}$ bande. Pour avoir cinq demi-bandes, il faut répéter cinq fois $\frac{1}{2}$ bande, pas cinq fois la bande entière...
 E5 : **On peut peut-être écrire $5 \times \frac{1}{2}$ d'abord.**
 EXP : Oui, c'est vrai, on pourrait écrire $5 \times \frac{1}{2}$ (elle l'écrit), et si on veut écrire ça juste en une fraction, sans qu'il y ait d'opération, est-ce qu'on peut écrire ça en une fraction, cinq moitiés de la bande ?
 (4 secondes)
 E5 : **Cinq point deux ?**
 EXP : **Non, $5 \times \frac{1}{2}$, ça fait $\frac{5}{2}$. (Elle écrit $5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.) Cinq moitiés de la bande, on écrit ça comme ça, cinq demies (en pointant $\frac{5}{2}$).**

Dans le groupe AS, la fraction $\frac{20}{8}$ dégagée en situation d'action est confrontée à $2 \frac{1}{2}$. La relation entre le numérateur (20) et le dénominateur de la fraction (8) permet difficilement sa comparaison avec $2 \frac{1}{2}$. Ensuite la comparaison est établie entre $\frac{20}{8}$, $2 \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$. L'expérimentatrice institutionnalise finalement l'écriture $\frac{5}{2}$ pour représenter 5 moitiés et présente la liste d'écritures équivalentes suivante en faisant référence à ce que les élèves ont fait : $20 \times \frac{1}{8} = \frac{20}{8} = 2 \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Le terme « moitié », jugé plus familier que le terme « demie », a été utilisé par l'expérimentatrice. Cependant, le terme « demie », étant associé à 2 en position du dénominateur, évoque l'écriture fractionnaire $a/2$, ce qui n'est pas le cas avec le terme « moitié ». Il est possible que, dans ce cas-ci, la familiarité du terme « moitié » ait privé les élèves d'indices sur les relations entre le code oral et le code écrit.

- Tâche B : segment de $2 \frac{1}{4}$ bandes-unités (OR1, OR2, AS)

Au deuxième segment, les élèves des groupes OR arrivent à produire un message adéquat en adoptant la conduite B ou la conduite D. Dans le groupe AS, les élèves adoptent la même conduite qu'à la tâche A. Comme le montre l'extrait suivant, pour mettre en œuvre une stratégie, ils s'appuient sur la décontextualisation réalisée après la tâche A (pour produire le message $2 \frac{1}{2}$), ce qui conduit les élèves à considérer qu'il faut reporter la bande-unité deux fois et qu'il y a ensuite 2 carreaux (qui correspondent chacun à $\frac{1}{8}$ de la bande-unité). Les élèves formulent donc comme message : 2 et 2 (au lieu de $2 \frac{2}{8}$).

E9 : C'était quoi l'autre message que l'autre équipe avait écrit tantôt ?
 EXP : Deux et une demie, parce qu'il répétait deux fois la bande, après il restait un petit bout et pour savoir à quelle fraction de la bande correspondait le petit bout, ils ont plié la bande et ils ont vu que le reste correspondait à la moitié de la bande; fait que ça faisait deux bandes et une demie bande.
 E9 : Ah oui....
 (E8 prend la bande (pliée en huit) et la reporte sur le segment.)
 E8 : Mais là ça ici ça arrive pas sur la ligne.
 E9 : Mais c'est parce que tes morceaux sont pas toute pareils.
 E7 : Ça arrive à peu près là.
 E8 : Fait que ça fait deux et deux.
 E9 : Deux et deux ?
 E8 : Ben deux demies peut-être ?
 E9 : Deux demies ?
 E7 : Ben écris deux pis deux.
 (E9 écrit « 2 et 2 ».)

L'expérimentatrice précise aux élèves qu'elle ne peut pas savoir que les deux « 2 » du message ne représentent pas la même longueur. Les élèves font alors de nouveaux essais : 8 bandes, 2 bandes et 2 carreaux, deux demies de huit bandes. S'appuyant sur les actions de pliage, en 8 parts égales, effectuées par les élèves, l'expérimentatrice conclut en présentant l'écriture $2 \frac{2}{8}$.

- Décontextualisation liée à la tâche B (OR1, OR2, AS)

Dans les deux groupes OR, l'expérimentatrice invite les élèves à comparer les écritures suivantes comme mesure du segment : $2 \frac{1}{4}$ bandes-unités et $\frac{9}{4}$ d'une bande-unité. Dans le groupe OR1, les trois élèves jugent qu'un segment qui mesure $\frac{9}{4}$ de la bande-unité est plus

petit qu'un segment qui mesure $2 \frac{1}{4}$ bandes-unités sans être en mesure d'en donner les raisons. Le retour à la bande-unité et à ses sous-unités permet rapidement aux élèves de comprendre l'équivalence de ces deux écritures. Dans le groupe OR2, les élèves E4 et E6 considèrent rapidement l'écriture $\frac{9}{4}$ comme étant équivalente à $2 \frac{1}{4}$. L'élève E5, quant à elle, refait le report de la bande-unité pliée en 4 parts égales sur le segment et conclut, en dénombrant le nombre de $\frac{1}{4}$ reporté, que la bande mesure 8 et $\frac{1}{4}$. Cette proposition est discutée et l'expérimentatrice conclut en spécifiant la différence entre $8 \frac{1}{4}$ bandes-unités et $\frac{9}{4}$ de la bande-unité.

Dans le groupe AS, les écritures $2 \frac{2}{8}$ et $2 \frac{1}{4}$ sont confrontées. Les élèves demandent de vérifier avec les bandes. Avec le soutien de l'expérimentatrice et le recours aux bandes, ils établissent l'équivalence entre ces écritures. Ensuite, l'expérimentatrice demande combien de fois un quart de la bande-unité entre dans $2 \frac{1}{4}$ bandes-unités. Les élèves E7 et E9 trouvent la solution sans recourir au matériel, ce qui est plus difficile pour E8. Cependant, aucun élève n'établit la relation entre le report de $\frac{1}{4}$ de bande-unité, neuf fois, et la mesure $\frac{9}{4}$ de bandes-unités. L'expérimentatrice institutionnalise donc la relation entre reporter 9 fois $\frac{1}{4}$ de la bande-unité, le calcul $9 \times \frac{1}{4}$ et la fraction $\frac{9}{4}$.

- Tâche C : segment de $1 \frac{2}{3}$ bande-unité (OR1, OR2)

Dans les groupes OR, outre l'élève E1 qui ne se prononce pas, les élèves donnent d'abord une réponse approximative, soit $1 \frac{1}{2}$ bande-unité dans le groupe OR1 et $1 \frac{3}{4}$ bande-unité dans le groupe OR2. La rétroaction du milieu leur permet de constater l'imprécision de leur message, ce qui les conduit à adopter la conduite D lors du deuxième message et donc à produire l'écriture numérique $1 \frac{2}{3}$ bande.

- Décontextualisation liée à la tâche C (OR1, OR2)

Les messages suivants sont présentés: $1 \frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{6}$, $1 \frac{8}{12}$, $1 \frac{4}{6}$, $1 \frac{3}{4}$. Les élèves doivent indiquer ceux qui permettent de tracer un segment de la même longueur que $1 \frac{2}{3}$ bande-unité. Dans le groupe OR1, avant même que l'expérimentatrice présente les autres messages,

l'élève E2 indique qu'on peut aussi écrire $5/3$, proposition qui reçoit l'assentiment des autres élèves. Les élèves recourent à l'usage des bandes pour vérifier l'équivalence des différentes écritures soumises. Il aurait été cependant plus approprié de réserver l'utilisation du matériel à la phase de validation, ce qui a d'ailleurs été fait dans le groupe OR2. L'exercice proposé conduit ainsi les élèves de OR2 à traiter directement les écritures, à échanger entre eux sur des propositions faites par l'un ou l'autre des élèves. Enfin, les groupes OR1 et OR2 ont réussi chacune des comparaisons numériques proposées.

7.2.2.2 Scénario ajouté (AS)

Un scénario a été ajouté dans le groupe AS en raison des difficultés des élèves, au scénario 1, à modéliser par des écritures mathématiques appropriées les actions réalisées sur les bandes-unités pour mesurer un segment. Le scénario ajouté comporte deux activités : a) tracer des segments à partir de mesures de longueur exprimées en fraction, visant ainsi à établir la relation entre les actions effectuées sur les bandes et l'écriture fractionnaire; b) comparer la mesure de deux segments, ce qui permet de travailler la comparaison de fractions.

a) Tracer des segments

L'expérimentatrice a en sa possession un segment dessiné sur un transparent et elle envoie un message contenant les mesures de ce segment exprimées en fraction ou en nombre fractionnaire pour que les élèves reproduisent un segment de même longueur. Les élèves possèdent une bande-unité identique à celle de l'expérimentatrice. La rétroaction est assurée par la superposition du transparent sur les segments tracés par les élèves.

- Premier message : $1 \frac{1}{2}$ bande-unité

Les élèves E8 et E9 tracent un segment de $1 \frac{1}{2}$ bande-unité. L'élève E7 n'arrive pas à interpréter la tâche sur le plan numérique, ce n'est donc pas la longueur du segment qui sera pour lui l'enjeu, mais la position du segment sur la feuille : « Couché ou de même ? (...) Il faut que je parte de là ? » Autrement dit, cet élève se demande d'abord s'il doit tracer le

segment à l'horizontale ou à la verticale, et il s'interroge ensuite sur l'endroit où doit commencer le segment. Or, devant l'impasse auquel ces questions le conduisent, il se replie sur la longueur du segment, mais sans saisir le rôle de la bande comme unité de mesure : « Mais elle mesure quoi en centimètres ta ligne ? » Les élèves E8 et E9 décrivent à E7 les gestes à poser pour tracer un segment de $1\frac{1}{2}$ bande-unité. Cette description s'accompagne de justifications appropriées et rend compte de connaissances explicites sur les actions menées.

- Deuxième message : $\frac{3}{4}$ de bande-unité

L'élève E8 engage l'interprétation mesure de la fraction. Ce faisant, sa stratégie est de plier la bande-unité en 4 et, laissant pliée la bande-unité, de reporter 3 fois la partie de $\frac{1}{4}$. L'élève E9 plie également la bande-unité en 4, mais elle la déplie ensuite pour tracer le segment aux $\frac{3}{4}$ de la bande-unité. Les difficultés de cette élève à interpréter le message suivant ($\frac{5}{4}$ de bande-unité) montre qu'elle engage une interprétation partie/tout. L'élève E7 trace un segment de 3 bandes-unités. Il semble ainsi interpréter que le numérateur représente le nombre de fois que l'unité est reportée, sans tenir compte du dénominateur.

- Troisième message : $\frac{5}{4}$ de bande-unité

La première interprétation engagée par E7 consiste à tracer un segment de $\frac{4}{5}$ de bande-unité, sans doute en raison des difficultés à interpréter la fraction impropre $\frac{5}{4}$. L'élève E9 rencontre les limites de l'interprétation partie/tout engagée pour tracer un segment de $\frac{3}{4}$ de bande-unité et s'exclame : « Mais ça se peut pas ! Tu plies en quatre, pis après ça, faut que t'en aies cinq ! » L'interprétation mesure permet cependant à E8 de concevoir la fraction impropre comme l'itération de $\frac{1}{4}$, 5 fois. Les explications de E8 permettent de relancer E7 et E9. Ces deux élèves ne reproduisent toutefois pas la stratégie de E8 : ils tracent d'abord un segment de $\frac{4}{4}$ bande-unité et lui ajoute ensuite $\frac{1}{4}$ de bande-unité. L'expérimentatrice conclut sur l'équivalence des deux procédés et en profite pour institutionnaliser la relation entre les écritures $\frac{5}{4}$ et $1\frac{1}{4}$.

b) Comparer la mesure de deux segments

Deux mesures de segment sont présentées. Les élèves discutent afin d'identifier le segment qui, selon eux, est le plus long. La rétroaction est assurée par le traçage effectif des deux segments après chaque comparaison.

- Première comparaison : $\frac{3}{4}$ de bande-unité et $\frac{4}{3}$ de bande-unité

L'élève E7 anticipe qu'un segment de $\frac{3}{4}$ de bande-unité est plus long qu'un segment de $\frac{4}{3}$ de bande-unité « parce que $\frac{3}{4}$, ça va être séparé en plus de morceaux ». Les élèves E8 et E9 jugent plutôt que les segments ont la même longueur parce que les fractions sont composées des mêmes termes.

- Deuxième comparaison : $\frac{1}{3}$ de bande-unité et $\frac{1}{6}$ de bande-unité

L'élève E8 juge que le segment de $\frac{1}{6}$ est plus long que celui de $\frac{1}{3}$ de bande-unité, tandis que les élèves E7 et E9 indiquent que $\frac{1}{3}$ de bande-unité est plus long parce que le dénominateur est plus petit, donc les parties sont plus grandes.

- Troisième comparaison : $\frac{6}{8}$ de bande-unité et $\frac{3}{4}$ de bande-unité

Les élèves E7 et E8 anticipent que le segment de $\frac{3}{4}$ est plus long que celui de $\frac{6}{8}$ de bande-unité parce que le dénominateur est plus petit. Quant à l'élève E9, elle juge que les segments sont de la même longueur et explique : « Parce que regarde, $4 + 4$, 8, pis $3 + 3$, 6. »

Enfin, l'ajout de ce scénario permet aux élèves du groupe AS de mieux comprendre la fraction en tant que mesure. En effet, au terme de ce scénario, le dénominateur semble associé au nombre de parts égales que doit contenir la bande-unité, et le numérateur, au nombre de fois que l'on doit reporter cette part. Les élèves ont cependant du mal à s'appuyer sur ce contexte pour comparer des fractions : ils doivent ainsi procéder au traçage des segments pour comparer les mesures.

7.2.2.3 Scénario 2

Au scénario 2, pour identifier le nombre de $1/b$ nécessaire pour obtenir une longueur donnée, trois conduites sont anticipées.

Conduite A : Ne considérer que la relation multiplicative entre $1/b$ et l'entier, ce qui conduit à aller chercher b bandes de $1/b$ bande-unité.

Conduite B : Évaluer qualitativement, par une partition « mentale » par exemple, le nombre de fois que $1/b$ entre dans la longueur à obtenir.

Conduite C : Établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre $1/b$ et la longueur à obtenir.

Le tableau 7.6 dresse un aperçu de l'évolution des conduites des élèves au cours de ce scénario. Au cours d'une même tâche, c'est-à-dire lorsque la valeur de la longueur à obtenir est conservée, on constate généralement une progression dans les conduites des élèves. En effet, dans quatre tâches sur cinq, la conduite C est de plus en plus fréquente. Ainsi, dans les problèmes où la longueur à obtenir est de 1 bande-unité et $1/2$ bande-unité, qui sont uniquement traités dans le groupe AS, aucun élève n'adopte la conduite C au premier problème et tous les élèves l'adoptent au dernier problème de la tâche. Dans les problèmes où il s'agit d'obtenir une longueur de 2 bandes-unités, présentés aux trois groupes d'élèves, aucun élève n'adopte la conduite C au premier problème et les neuf élèves l'adoptent au dernier problème de la tâche. Lorsque la longueur à obtenir est de $3/2$ bande-unité, tâche présentée aux deux groupes OR, on passe de trois à cinq élèves qui adoptent la conduite C. Enfin, étant donné que la tâche B comporte d'abord des fractions dont le dénominateur est commun ($1/4$ et $3/4$), la conduite C apparaît dès le premier problème.

Tableau 7.6
Conduites adoptées par les élèves au scénario 2 de la situation 2

Variables numériques pour chacun des groupes			Conduites adoptées par chacun des élèves				
Longueur à obtenir	Valeur de $1/b$	Groupe	Conduite A	Conduite B	Conduite C	Autres conduites	Aucune prévision
Tâche ajoutée : 1 b-u	1/4	AS		E7, E9		E8	
	1/6	AS		E7, E8	E9		
	1/8	AS			E7, E8, E9		
Tâche A : 1/2 b-u	1/4	AS		E7, E8, E9			
	1/6	AS			E7, E8, E9		
	1/8	AS			E7, E8, E9		
Tâche B : 3/4 b-u	1/4	OR1, OR2, AS	E1, E2, E3, E8		E4, E5, E6, E7, E9		
	1/8	OR1, OR2, AS		E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9	E6		E1
	1/12	OR1, OR2, AS		E3, E7, E8	E2, E4, E6	E9	E1, E5
Tâche C : 2 b-u	1/4	AS	E7, E9				E8
	1/6	OR1, OR2, AS		E1, E2, E3, E5, E7, E8	E4, E9		E6
	1/8	OR1, OR2, AS		E5, E6, E7	E2, E3, E4, E8, E9		E1
	1/12	OR1, OR2, AS			E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9		
Tâche D : 3/2 b-u	1/6	OR1, OR2		E1, E5	E2, E4, E6	E3	
	1/8	OR1, OR2		E1	E2, E3, E4, E5, E6		
	1/12	OR1, OR2			E2, E3, E4, E5, E6		E1

Légende

b-u : bande-unité

- Tâche ajoutée : 1 bande-unité (AS)

Dans le groupe AS, afin de travailler la relation $b \times 1/b = 1$, des problèmes dans lesquels la longueur à obtenir est de 1 bande-unité sont présentés; les élèves doivent trouver la valeur de b . Rappelons que cette relation a été traitée par ce groupe, et avec succès, lors de la première situation. Cependant, dans la présente tâche, les élèves n'investissent pas d'emblée la relation

multiplicative entre $1/b$ et 1 et cherchent plutôt le nombre de « morceaux » qui entrent dans la « bande ». Ce passage est particulièrement éclairant sur la prégnance de l'interprétation partie/tout où $1/4$ signifie « 1 morceau sur 4 ».

Ces conduites sont à analyser d'un double point de vue : la consigne comme élément du milieu et l'interprétation de la fraction comme quantité. Du point de vue du milieu, le mot « bande » repris dans ce contexte n'a pas la fonction d'instrument de mesure comme dans le scénario précédent. Aussi, la consigne est formulée en utilisant l'expression « morceaux de $1/4$ de bande ». Le sens attribué au mot « morceaux » semble conduire les élèves à évaluer le nombre de morceaux recherché sans considérer la valeur de ce « morceau ». Comment en témoigne le début de l'échange ci-dessous, si les termes choisis visent la compréhension de la tâche par les élèves, ils ne favorisent pas la mise en relation fractionnaire. Une consigne telle que *Allez chercher le nombre de $1/n$ nécessaire pour obtenir 1 bande-unité* serait plus appropriée. Or, la difficulté des élèves ne relève pas uniquement de la consigne. Elle témoigne surtout, il nous semble, d'une conception de la fraction en tant que quantité pour E7 (qui s'interroge sur la longueur d'un quart) ou encore en tant que partie/tout pour E8 (qui choisit 1 plutôt que 4), mais aussi en terme de relation avec le tout pour E9. Ces trois interprétations se confrontent au sein des échanges et conduisent à invalider les solutions de E7 et de E8. La progression dans l'échange permet ainsi une synchronisation de l'activité mathématique des trois élèves qui ont pourtant des perspectives très différentes.

EXP : Vous devez trouver combien de morceaux de $1/4$ de bande il faut, pour que, quand on place les morceaux un à côté de l'autre ici (elle montre avec son doigt), on obtienne une bande-unité.

(Les trois élèves cherchent : ils sont avancés sur leur chaise, penchés sur le bureau et regardent la bande. Les élèves E7 et E9 font des lignes avec leur doigt pour mesurer approximativement...)

E8 : Moi je dis un.

E9 : Moi je dirais trois là... Ah non ! Peut-être plus quatre.

E7 : Attends, attends...

E9 : Mais la bande, elle mesure combien ?

EXP : Ça, c'est une bande, et les morceaux que vous devez aller chercher mesurent $1/4$ de cette bande-là.

E9 : Ça donne pas ben ben d'indices ça !

(E7 place ses doigts sur la bande et compte).

E8 : Ben non, $1/4$ c'est pas ça E7.

E9 : Ce que tu fais, c'est la moitié.

E7 : Ben, c'est long comment d'abord un quart !?!
 E9 : C'est plus petit en tout cas. Moi, je dirais quatre moi !
 E8 : Moi je dis un.
 E9 : Ben là ! Ça peut pas faire un pour toute ça !
 E8 : Hen ? (rire)
 E7 : Attends, un, deux, trois, quatre (il place ses doigts sur la bande pour compter). Moi aussi je dis quatre.
 E8 : Mais c'est parce que c'est UN quart.
 E9 : Oui mais un quart c'est un sur quatre. On va chercher quatre, on va chercher quatre !
 E8 : OK, on va essayer quatre, mais c'est moi qui vais les chercher.

Ensuite, pour identifier le nombre de bandes de $\frac{1}{6}$ de la bande-unité nécessaire pour obtenir une bande-unité, E7 et E8 essaient, en utilisant leur doigt, d'évaluer combien de fois $\frac{1}{6}$ entre dans la bande-unité. L'élève E9 remarque : « C'est parce que si vous regardez, tantôt, il en fallait quatre, pis le chiffre en bas c'était 4. Fait que là, c'est six. » Les deux autres élèves sont d'accord avec elle. Ils utilisent également cette stratégie pour solutionner le dernier problème de cette tâche.

- Décontextualisation liée à la tâche ajoutée (AS)

L'expérimentatrice procède ensuite à une brève institutionnalisation en présentant une liste de fractions équivalentes à 1. En référence à ce que les élèves ont fait, les fractions $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$ et $\frac{8}{8}$ sont les premières de la liste. L'élève E7 propose la fraction $\frac{13}{13}$, mais en observant les premières fractions, il hésite : « Ah non, c'est par bond de deux ! » L'expérimentatrice recourt aux bandes et explique que $\frac{13}{13}$ d'une bande est équivalent à reporter 13 fois $\frac{1}{13}$ de bande, ce qui correspond à une bande. L'élève E8 propose ensuite la fraction $\frac{22}{22}$, et l'élève E9, la fraction $\frac{44}{44}$ en justifiant ainsi « parce que $22 + 22$ ça fait 44 ». L'expérimentatrice impose le numérateur 17. Après quelques secondes de réflexion, l'élève E8 propose $\frac{17}{8}$, en recherchant sans doute un dénominateur qui correspond à la moitié du numérateur. L'élève E9 propose $\frac{17}{1}$, pour avoir une fraction équivalente à 1. Pour aider les élèves, l'expérimentatrice les invite à observer ce que les fractions dans la liste ont en commun, ce qui conduit E7 à trouver la solution : $\frac{17}{17}$. Ensuite, les trois élèves prennent plaisir à ajouter des nouvelles fractions équivalentes en choisissant des termes de plus en plus grands (ex. : $\frac{2347157}{2347157}$). L'élève E9 remarque : « C'est parce que tous les chiffres

marchent ! » L'institutionnalisation se termine en concluant qu'il existe une infinité de fractions équivalentes. Il semble important de noter que les élèves réussissent finalement à établir d'autres équivalences, mais que, pour ce faire, ils s'appuient sur les régularités numériques et non sur la relation $b \times 1/b = 1$, qui était la connaissance visée dans la phase d'action précédente.

- Tâche A : $1/2$ bande-unité (AS)

Étant donné que le matériel utilisé est le même qu'à la tâche précédente, les élèves du groupe AS ne font qu'évaluer le nombre de « bandes » (représentées par $1/4$) nécessaire pour obtenir la longueur de la bande sous leurs yeux (représentée par $1/2$). Pour identifier le nombre de $1/6$ et celui de $1/8$ nécessaires pour faire $1/2$, ils utilisent une stratégie numérique, s'appuyant sur un raisonnement additif : « 3, parce que $3 + 3 = 6$ » et ensuite « 4, parce que $4 + 4 = 8$ ». Le choix de la longueur à obtenir ($1/2$) ne permet pas de mettre en échec les stratégies additives.

- Tâche B : $3/4$ de la bande-unité (OR1, OR2, AS)

Le premier problème de la tâche B, dans lequel les élèves doivent identifier le nombre de $1/4$ de bande-unité nécessaire pour obtenir $3/4$ de bande-unité, comporte des fractions ayant un dénominateur commun, ce qui facilite leur mise en relation. Cinq des neuf élèves trouvent immédiatement une solution juste (3). Les autres élèves interprètent $3/4$ de bande-unité comme étant la bande-unité et vont chercher 4 fois $1/4$ (conduite A). Modifier le tout de référence est une conduite particulièrement fréquente en début de tâche, mais la rétroaction permet aux élèves de s'ajuster.

Au problème suivant, alors que $1/b$ correspond à $1/8$, une seule élève, E6, adopte un raisonnement multiplicatif. Elle s'appuie directement sur les fractions équivalentes : $3/4 = 6/8$. La conduite la plus fréquente, adoptée par sept élèves, consiste à se servir des trois bandes de $1/4$ obtenues précédemment pour effectuer un comptage rythmé selon chaque quart. Cinq élèves (E4, E5, E7, E8, E9) obtiennent ainsi le bon résultat en comptant par 2 (1-2; 3-4, 5-6), alors que les deux autres, E2 et E3, obtiennent 9, en comptant par 3 plutôt que

2. Le comportement de E2 mérite une attention particulière. Cet élève déjoue la situation en proposant une réponse rapidement pour profiter sciemment d'une rétroaction. Il interprète ensuite la rétroaction en cherchant ce qui fonde le résultat et s'exclame : « Ah ! Je sais pourquoi j'ai raté ! » Puis il réussit, avec un contrôle assuré, le problème suivant.

Au terme de cette tâche, alors que $1/b$ correspond à $1/12$, trois des neuf élèves (E2, E4 et E6) adoptent la conduite C et ils sont en mesure de justifier leur choix. La tâche semble ainsi avoir permis à ces élèves d'établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre $1/12$ et $3/4$. Concernant les autres élèves, trois adoptent la conduite B (E3, E7, E8), deux ne se prononcent pas (E1 et E5) et une élève, E9, formule une prévision juste sans que nécessairement la relation multiplicative entre les fractions en jeu soit établie. En effet, elle établit les relations entre les différents comptages rythmés effectués : pour $1/4$, soit 3; pour $1/8$, soit 6; donc pour $1/12$, elle conclut qu'il en faut 9. L'enchaînement des tâches est tel qu'on obtient une suite de 3 multiples. Cette suite est facilement dégagée du fait que le matériel obtenu pour chaque validation n'est pas soustrait de la vue des élèves.

- Tâche C : 2 bandes-unités (OR1, OR2, AS)

Lorsque la longueur à obtenir est de 2 bandes-unités, la conduite la plus fréquente (six des neuf élèves lorsque $1/b$ correspond à $1/6$) consiste d'abord à évaluer qualitativement le nombre de fois que $1/b$ de la bande-unité entre dans 2 bandes-unités (conduite B). Au fur et à mesure que le milieu informe des résultats, l'expérimentatrice conserve une trace écrite en formant une liste de fractions équivalentes à 2 ($2 = 12/6 = 16/8 = \dots$), ce qui permet aux élèves de dégager la relation multiplicative entre $1/b$ et 2. En effet, au dernier problème de cette tâche, tous les élèves adoptent la conduite C. Notons toutefois que les élèves du groupe AS adoptent un raisonnement additif en faisant $b + b$. La longueur à obtenir ne permet pas de mettre en échec les stratégies additives. Il aurait sans doute été préférable d'augmenter la longueur à obtenir (3 bandes ou plus) et d'offrir le support d'une calculette.

- Décontextualisation liée à la tâche C (OR1, OR2, AS)

L'exercice suivant est proposé : *Quelle fraction, parmi les suivantes, est la plus grande : $6/2$, $15/5$, $9/3$, $12/4$?*

Sept des neuf élèves considèrent la fraction $6/2$ comme étant la plus grande. Ils expliquent avoir appris en classe que plus le dénominateur est petit, plus les fractions sont grandes. L'élève E3 précise : « Parce que quand le dénominateur est plus petit, les parties sont plus grosses. » Un élève, E7, interprète $15/5$ comme étant la plus grande fraction car les termes sont plus grands, et une seule élève, E4, émet l'hypothèse que les fractions sont équivalentes mais sans en être certaine.

Enfin, malgré le travail fait avec les bandes, aucun élève n'y recourt pour comparer les fractions. Pour vérifier les prévisions, l'expérimentatrice trace les segments en expliquant ce qu'elle fait. Dans les trois groupes, les élèves comprennent que les fractions sont équivalentes avant que l'expérimentatrice ne termine de tracer les segments. L'exercice proposé permet de confronter la conception selon laquelle plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande.

- Tâche D : $3/2$ bande-unité (OR1, OR2)

Pour identifier le nombre de $1/b$ nécessaire pour obtenir $3/2$ bande-unité, au premier problème ($1/b = 1/6$), trois des six élèves (E2, E4, E6) adoptent la conduite C. Parmi les trois autres élèves, deux adoptent la conduite B (E1, E5) et une (E3) recherche le nombre de $1/6$ de bande-unité nécessaire pour obtenir 3 bandes-unités plutôt que $3/2$ bande-unité. Dans les deux problèmes suivants, tous les élèves, à l'exception de E1, adoptent la conduite C.

- Décontextualisation liée à la tâche D (OR1, OR2)

Les élèves doivent ensuite compléter les trois tableaux suivants. Pour chacun des tableaux, il s'agit d'identifier la longueur obtenue sur la première ligne et de compléter la première colonne pour obtenir la même longueur (ex. : $3 \times 1/2 = 3/2$; $a \times 1/6 = 3/2$ ou $9/6$; etc.).

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue
3	1/2	
	1/6	
	1/8	
	1/12	

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue
5	1/2	
	1/6	
	1/8	
	1/12	

Nombre de fois	Fraction inscrite sur le morceau	Longueur obtenue
10	1/2	
	1/6	
	1/8	
	1/12	

Dans le groupe OR1, pour compléter le premier tableau, l'élève E2, se souvenant de la solution, cherche le calcul qui lui avait permis de l'obtenir : « Je me souviens que ça prend 18 douzièmes pour avoir $3/2$, mais je me souviens pu comment j'avais fait pour trouver. » Pour aider les élèves, l'expérimentatrice pose des sous-questions en passant par $1/b$, faisant ainsi référence au sens mesure de la fraction. Par exemple, pour aider les élèves à identifier combien il y a de $1/6$ dans $10/2$, elle leur demande combien il y a de $1/6$ dans $1/2$, ce qui leur permet ensuite d'identifier le nombre de $1/6$ dans $10/2$.

Dans le groupe OR2, les élèves complètent rapidement le premier tableau, en se référant à ce qu'ils ont fait avec les bandes. Pour compléter le deuxième tableau, au lieu d'identifier le nombre de $1/6$ de bande-unité pour obtenir $5/2$ bandes-unités, E5 identifie le nombre de $1/6$ pour obtenir 3, obtenant ainsi 18. Elle explique son raisonnement à l'élève E4, qui remarque son erreur. Comme le montre l'extrait suivant, les échanges entre ces deux élèves les conduisent à la solution juste, soit 15. L'extrait montre également les difficultés de E4 concernant la relation $a \times 1/b = a/b$ (en l'occurrence, $15 \times 1/6 = 15/6$).

EXP : Ça prend combien de $1/6$ pour avoir cinq demi-bandes ?
 (4 secondes)
 E5 : Dix-huit.
 EXP : Est-ce que tu es d'accord E4 ?
 E4 : Ben, je sais pas là.
 E5 : Regarde, je te montre. Avec ces deux-là, ça fait un (elle prend deux fois $1/2$), parce que ça c'est $1/2$, pis ça c'est $1/2$.
 E4 : Attends, attends.
 E5 : Non, non, regarde, regarde, c'est moi qui t'explique là ! Si je prends $1/2$ pis $1/2$, ça fait un au complet. Pis là y'en a six, fait que deux autres, ça fait 12, pis deux autres, ça fait 18.
 E4 : Non mais tu rajoutes pas six encore après parce qu'après y'en a juste $1/2$, fait que tu rajoutes trois.
 E5 : Ah oui, trois, fait que ça donne...
 E4 : Quinze.
 (...)

 E4 : (Elle écrit 15 dans la première colonne, mais ne sait pas quoi écrire dans la troisième colonne.) Donc c'est égal à... $15/2$? Non ?...
 E5 : Non, c'est 15 sur 6, c'est des sur six pas des demies.
 E4 : Ah oui, 15 sur 6, c'est vrai ! Fait que $15/6$, c'est égal à deux et une demie.

À la suite du troisième tableau, les élèves recherchent des fractions équivalentes à 5. L'élève E2 remarque : « En divisant, ça donne toujours 5. » Le choix de la valeur de la *longueur obtenue*, qui correspond à un nombre entier dans le troisième tableau, favorise l'interprétation de la fraction en tant que quotient. L'expérimentatrice profite d'ailleurs de ce commentaire pour institutionnaliser la relation entre la fraction et la division. Dans les deux groupes, les élèves cherchent des fractions équivalentes en choisissant des termes de plus en plus grands (ex. : $500/100$). Les élèves les plus faibles de chacun des groupes (E1 dans le groupe OR1 et E5 dans le groupe OR2) prennent particulièrement plaisir à rechercher de nouvelles fractions. Nous attribuons cet engagement au fait que la régularité qu'ils ont dégagée leur permet d'exercer un contrôle. Ainsi, le fait d'être passif à l'égard d'une tâche, ce qui est particulièrement patent chez l'élève E1, reposerait davantage sur un manque de connaissances pour s'engager dans la tâche que sur une caractéristique propre aux élèves. Lorsque l'expérimentatrice décide de passer à une autre activité, l'élève E5 s'exclame d'ailleurs : « Non, non ! J'en ai encore plein d'autres ! »

- Décontextualisation ajoutée (OR1, OR2)

Un exercice de décontextualisation est ajouté, visant ainsi à amener les élèves à utiliser les connaissances développées en situation d'action dans un exercice impliquant un contexte intramathématique. Les élèves doivent mettre en ordre croissant six fractions, écrites sur des étiquettes : $1/3$, $3/6$, $6/8$, $3/2$, $8/4$, $9/3$. Dans les deux groupes, les élèves commettent beaucoup d'erreurs dans l'ordre proposé. Pour valider les solutions, l'expérimentatrice s'appuie sur les bandes, en associant les fractions à des mesures de segments. Les élèves constatent souvent leurs erreurs avant que le segment soit tracé. Il semble ainsi que les connaissances développées par les élèves au cours de la situation soient locales, dans la mesure où il leur faut se référer à la situation des « bandes-unités » pour que les élèves puissent contrôler les relations en jeu. Malgré les moments d'institutionnalisation prévus et improvisés au cours de la situation, la décontextualisation des connaissances reste difficile.

7.2.2.4 Énoncés de problème (OR1, OR2, AS)

Rappelons que les énoncés de problème sont modifiés pour le groupe AS.

- Premier problème

Énoncés de problème présentés aux groupes OR :

Un spectacle dure $1 \frac{3}{4}$ d'heure.

- a) Si chaque numéro présenté dure $1/4$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- b) Si chaque numéro présenté dure $1/8$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- c) Si chaque numéro présenté dure $1/12$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- d) Si chaque numéro présenté dure $1/16$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*

L'élève E2 est le seul qui trouve la solution à chaque énoncé de problème sans aide. Pour soutenir les autres élèves, deux interventions sont mises en œuvre par l'expérimentatrice :

décomposer les énoncés en deux sous-questions en demandant d'abord le nombre de numéros pour 1 heure et ensuite pour $\frac{3}{4}$ d'heure, et/ou établir explicitement la relation entre le problème et le contexte des bandes. L'élève E1, même avec beaucoup de soutien, n'arrive pas à trouver les solutions.

Énoncés de problème présentés au groupe AS :

- a) *Un spectacle dure 1 heure. Si chaque numéro dure $\frac{1}{2}$ heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- b) *Un spectacle dure 1 heure. Si chaque numéro dure $\frac{1}{4}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- c) *Un spectacle dure 1 heure. Si chaque numéro dure $\frac{1}{6}$ d'heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*
- d) *Un spectacle dure 3 heures. Si chaque numéro dure $\frac{1}{2}$ heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ?*

Dans le groupe AS, la « mesure à obtenir » correspond à 1 dans les trois premiers énoncés, visant ainsi à réinvestir ce qui a été fait avec les bandes précédemment.

Les élèves trouvent la solution à l'énoncé a) en transformant $\frac{1}{2}$ heure en 30 minutes, ce qui leur évite d'avoir à traiter les fractions. Pour trouver la solution à l'énoncé b), ils rencontrent les limites de cette stratégie, car ils ne savent pas à combien de minutes correspond $\frac{1}{4}$ d'heure. Pour les aider, l'expérimentatrice s'appuie sur ce qui a été fait avec les bandes, ce qui permet aux élèves de solutionner adéquatement les énoncés b) et c). Cependant, étant donné que les trois premiers résultats correspondent respectivement à 2, 4 et 6, avant même d'avoir lu l'énoncé d), les élèves E7 et E9 croient que le résultat sera 8. L'élève E8 trouve quant à elle la solution juste.

- Deuxième problème

Énoncés de problème présentés aux groupes OR :

Un sac contient $\frac{3}{5}$ kg de farine.

- a) *On partage la farine également entre 3 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- b) *On partage la farine également entre 6 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- c) *On partage la farine également entre 9 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*

À l'énoncé a), l'élève E2 est le seul à répondre correctement. Les autres élèves ont du mal à interpréter le problème. L'expérimentatrice schématise les relations entre les données pour soutenir leur mise en relation.

À l'énoncé b), dans les deux groupes, les élèves répondent $2/5$. Ils interprètent ainsi que s'il y a 2 fois plus de sacs, il y a 2 fois plus de farine. L'expérimentatrice utilise le schéma précédent pour mettre en relation les deux énoncés (voir figure 7.2).

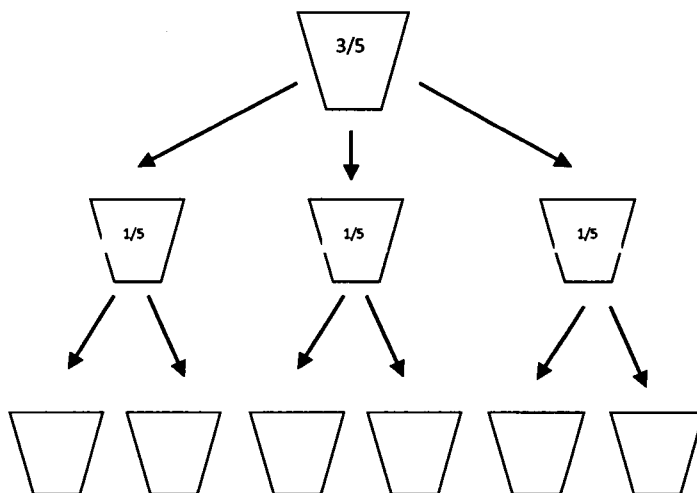


Figure 7.2 : Schéma utilisé par l'expérimentatrice pour aider les élèves à solutionner un problème lors de la deuxième situation

Cependant, ce schéma modifie le problème : les élèves recherchent alors la demie de $1/5$. C'est ainsi que les élèves, dans les deux groupes, fournissent la solution $1/2$. L'expérimentatrice, pour relancer les élèves, leur demande : « S'il y a $1/2$ kg + $1/2$ kg + $1/2$ kg..., comme ça, dans les 6 sacs, est-ce qu'en tout, on a $3/5$ kg ? », ce qui déstabilise les élèves. L'élève E2 demande d'ailleurs : « Ben c'est la moitié de $1/5$, mais c'est quoi la moitié de $1/5$? » L'expérimentatrice s'appuie finalement sur les bandes pour aider les élèves à identifier la fraction qui correspond à la moitié de $1/5$. Le recours systématique de l'expérimentatrice à la situation de référence des bandes, devant l'impasse des élèves, montre qu'autant les élèves que l'expérimentatrice souffrent d'une tâche où le milieu n'est pas

organisé pour fournir une rétroaction. Cette difficulté à alimenter les interactions didactiques se présente lorsque la tâche vise à se distancer du contexte de référence, autrement dit, vise à la décontextualisation.

À l'énoncé c), en raison des difficultés des élèves, l'expérimentatrice demande aux élèves si on peut utiliser le résultat pour 3 sacs pour trouver la solution pour 9 sacs. Cette intervention est efficace et favorise le recours à l'opérateur scalaire : s'il y a 3 fois plus de sacs, il y aura 3 fois moins de farine. Les élèves arrivent ensuite à identifier que la fraction 3 fois plus petite que $1/5$ est $1/15$. Ce raisonnement montre une évolution des connaissances des élèves depuis le début de la séquence. Cependant, E1 et E5 identifient $1/15$, dans la suite des fractions obtenues précédemment, soit $1/5$ et $1/10$.

Énoncés de problème présentés au groupe AS :

- a) *Un sac contient 1 kg de farine. On partage la farine également entre 2 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- b) *Un sac contient 1 kg de farine. On partage la farine également entre 3 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- c) *Un sac contient 1 kg de farine. On partage la farine également entre 7 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*
- d) *Un sac contient $3/4$ kg de farine. On partage la farine également entre 3 sacs. Combien de kg de farine y aura-t-il par sac ?*

Les élèves du groupe AS bloquent sur l'unité de grandeur, kg. Ils demandent ce qu'est un kilogramme ou « c'est gros comment un kg ? ». Ils sont alors absorbés par cette question même si l'expérimentatrice les informe que c'est une mesure de poids. Cette réponse n'est pas pour eux satisfaisante et plusieurs questions sur les kilogrammes sont relancées par les élèves. Le contexte les éloigne alors des relations numériques en jeu, même si l'unité de mesure est sans effet sur la relation à effectuer dans le problème. Dans le vif de l'action, l'expérimentatrice modifie non pas la grandeur en jeu, mais les données numériques pour favoriser la relation multiplicative. Elle propose alors 6 kg de farine partagés entre 3 sacs. De plus, elle dessine les sacs pour aider les élèves à se représenter le problème. Mais cette intervention ne fait qu'alimenter les questions des élèves sur la « grosseur » d'un kilogramme. Les élèves E7 et E8 tracent, sur le dessin du sac, des lignes pour marquer la

quantité que peut représenter 6 kg dans un sac. L'élève E9 trouve finalement la solution : 2. L'expérimentatrice interroge les autres élèves : « Même si elle ne sait pas c'est gros comment un kilogramme, elle dit qu'il va y avoir 2 kg de farine par sac. Est-ce que vous êtes d'accord avec elle ? » Si cette question permet effectivement à E7 de se centrer sur les relations numériques, E8 continue à tracer les lignes dans le sac pour le partager en 3.

L'expérimentatrice reprend ensuite le problème avec les données originales (1 kg et 2 sacs). Après quelques solutions erronées, E8 s'exclame : « Haaa! Je l'sais ! C'est une demie ! », ce qui permet à E7 et E9 d'établir correctement les relations. Les énoncés b) et c) sont alors traités rapidement et avec succès.

L'énoncé d) est plus difficile puisque le nombre de kg de farine à partager n'est plus 1, mais $\frac{3}{4}$. La relance de l'expérimentatrice est portée par une modification du contexte: « J'ai un verre (elle dessine un verre). Mon verre est rempli aux $\frac{3}{4}$ de sa capacité (elle fait un trait aux $\frac{3}{4}$). Et j'ai 3 verres de la même grandeur (elle les dessine en dessous), qui sont vides. Si je transvide mon verre ici également dans les trois verres, quelle fraction de chaque verre sera remplie ? » Les élèves répondent $\frac{1}{3}$, interprétant qu'il y a $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ dans chaque verre. Cette solution est générée par la modification du tout de référence. L'expérimentatrice explique aux élèves, en s'appuyant sur le dessin, qu'il y a le tiers du jus dans chaque verre, mais que chaque verre est rempli au quart de sa capacité. Elle conclut en insistant sur le fait que dans $\frac{3}{4}$, il y a 3 fois $\frac{1}{4}$.

- Troisième problème

Énoncés de problème présentés aux groupes OR :

Avec 2 litres d'eau

- a) *Peut-on remplir des verres contenant exactement $\frac{1}{3}$ de litre chacun ? Combien ?*
- b) *Si on transvide l'eau également dans 10 verres, combien de litre(s) contiendra chaque verre ?*
- c) *Si on transvide l'eau également dans 5 verres, combien de litre(s) contiendra chaque verre ?*

Les élèves E3, E4 et E6 trouvent la solution à l'énoncé a) sans aide. Pour aider les autres élèves, l'expérimentatrice formule une question avec une référence à l'unité : « Avec un litre, on peut remplir combien de verres de $\frac{1}{3}$ de litre ? », ce qui permet aux élèves d'établir la relation entre 2 et $\frac{1}{3}$. À l'énoncé b), l'intervention qui permet de relancer efficacement les élèves s'appuie sur un rapport équivalent avec un retour à l'unité : « Est-ce qu'on pourrait se dire, il y a 1 litre pour 5 verres ? » L'expérimentatrice institutionnalise, ensuite, la relation entre la fraction et la division (fraction en tant que quotient) : « Si on prend 1 litre et qu'on le divise entre 5 verres, ça donne $\frac{1}{5}$ (elle écrit $1 \div 5 = \frac{1}{5}$), ou on peut se dire aussi, j'ai 2 litres et je les partage également entre 10 verres, ça donne $\frac{2}{10}$ (elle écrit $2 \div 10 = \frac{2}{10}$), est-ce que c'est équivalent, $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{10}$? » Les élèves acquiescent.

Pour solutionner l'énoncé c), E2 s'appuie sur la fraction quotient, venant tout juste de faire l'objet d'une institutionnalisation, et produit cette écriture : $2 \div 5 = \frac{2}{5}$. L'élève E3 obtient quant à elle $\frac{2}{10}$ en faisant $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. E2 explique à E3 que $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ (et non $\frac{2}{10}$) et les élèves retiennent alors $\frac{2}{5}$. À la demande de l'expérimentatrice, les autres élèves s'appuient sur le résultat précédent ($2 \div 10 = \frac{1}{5}$) pour trouver la solution de 2 verres partagés également entre 5 verres.

Énoncés de problème présentés au groupe AS :

- a) *Si on transvide 2 litres d'eau également dans 2 pots, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau par pot ?*
- b) *Si on transvide 2 litres d'eau également dans 4 verres, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau par verre ?*
- c) *Si on transvide 2 litres d'eau également dans 8 verres, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau par verre ?*

Les échanges à propos de ce problème sont comparables à ceux qui ont marqué le problème impliquant des kilogrammes. Devant l'impasse des élèves pour solutionner l'énoncé a), l'expérimentatrice choisit de modifier les nombres et propose 4 litres partagées également entre 2 pots. Cependant, la difficulté à se représenter des litres masque les relations numériques à établir. Par exemple, E8 répond que *les pots vont être remplis* et E9 fait un trait sur les pots en évaluant approximativement la quantité d'eau de chacun. Les interactions

aboutissent à une impasse, et l'expérimentatrice se repliera en fournissant le résultat, soit 2. Ce résultat recentre les élèves sur les relations numériques, et ils réussissent alors à trouver la solution à la version originale de l'énoncé a). À l'énoncé b), E9 propose $\frac{1}{4}$ puisque chaque verre a le $\frac{1}{4}$ de 2 litres. Les élèves E7 et E8 répondent $\frac{2}{4}$. S'interrogeant sur la compréhension des élèves, l'expérimentatrice demande si $\frac{1}{2}$ serait acceptable. La formulation de E7 montre la maîtrise des relations en jeu : « Oui, oui, c'est la même affaire! Parce que ça c'est la moitié de 4, pis ça c'est la moitié de 2. » À l'énoncé c), ayant dégagé que le résultat est une fraction dont les termes sont les données numériques de l'énoncé, le résultat $\frac{2}{8}$ est dégagé par les élèves.

7.3 Analyse de la situation sur la fraction en tant que rapport

La troisième situation vise à ce que les élèves produisent des rapports égaux dans le cadre d'un problème de quatrième proportionnelle. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un problème tiré de Lamon (2008), qui met en rapport la taille de deux bonshommes mesurés à partir de deux unités de mesure différentes. Le rapport entre les unités de mesure varie d'un scénario à l'autre : 1 trombone pour 2 boutons rouges au premier scénario, 2 trombones pour 3 boutons verts au deuxième scénario et 4 boutons rouges pour 3 boutons verts au troisième scénario. Afin de favoriser la décontextualisation des connaissances, au terme de la situation, les élèves doivent comparer des rapports dans deux énoncés de problème reposant sur un contexte différent de celui sollicité dans la situation originale.⁷⁹

7.3.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes

Le tableau 7.7 présente les activités réalisées auprès de chacun des groupes d'élèves ainsi que le temps accordé à chacune. Le groupe AS consacre environ deux fois moins de temps à la troisième situation que les groupes OR, ce qui s'explique par le fait que deux des trois scénarios prévus ne sont pas présentés. Le temps accordé à cette situation varie légèrement

⁷⁹ Le lecteur peut se référer à la section 5.2.3 du chapitre V (p. 112-120) pour obtenir une description plus détaillée de la troisième situation.

dans les groupes OR1 et OR2. Environ 15 minutes de plus y sont consacrées dans le groupe OR2.

Tableau 7.7

Répartition du temps de chacune des activités de la situation 3 pour les trois groupes d'élèves

SCÉNARIOS ET MOMENTS DE DÉCONTEXTUALISATION	OR1	OR2	AS
Scénario 1	5 min	5 min 50 s	8 min 25 s
Décontextualisation 1	55 s	2 min 50 s	2 min 30 s
- Exercice prévu			
- Exercice ajouté	X	X	2 min 55 s
			Fin séance 6
Scénario 2	15 min 45 s	18 min 10 s	X
- Scénario prévu	Fin séance 5	Fin séance 5	
- Bonshommes ajoutés	7 min	7 min 5 s	X
Décontextualisation 2	4 min 10 s	4 min 20 s	X
- Exercice prévu			
- Exercice ajouté	2 min 20 s	1 min 35 s	X
- Exercice prévu	10 min 50 s	11 min 30 s	X
Scénario 3	11 min 40 s	16 min 55 s	X
Décontextualisation 3	55 s	1 min	X
- Exercice ajouté			
- Exercice prévu	3 min 40 s	4 min 5 s	X
		Fin séance 6	
- Exercice ajouté	6 min 5 s	8 min 30 s	X
	Fin séance 6		
Décontextualisation 4	11 min 10 s	10 min 55 s	10 min 40 s
- Énoncé de problème 1			
- Énoncé de problème 2	11 min 15 s	12 min 45 s	13 min 10 s
- Exercice ajouté	XXXX	XXXX	12 min 50 s
Total	90 min 45 s	105 min 30 s	50 min 30 s

Une modification importante dans cette troisième situation consiste à ne pas présenter les scénarios 2 et 3 au groupe AS. Les deux premières situations ayant été plus longues que prévu et le nombre total de rencontres étant limité, une sélection dans les activités prévues s'est imposée. L'expérimentation auprès des groupes OR ayant été menée avant celle du groupe AS, nous avons pu prendre la mesure des exigences liées à l'interprétation rapport

dans les scénarios 2 et 3. Cependant, nous avons conservé les énoncés de problème prévus à la fin du scénario considérant que le contexte du premier énoncé de problème permet de s'appuyer aussi sur les interprétations partie/tout et quotient, ce qui n'est pas le cas pour les scénarios 2 et 3.

Deux ajouts relatifs aux moments de décontextualisation ont été faits dans les trois groupes. Le premier ajout concerne les moments de décontextualisation qui suivent les scénarios. La situation originale prévoyait, à la fin de chaque scénario, la présentation d'un énoncé à compléter de façon à dégager le rapport unitaire entre les deux unités de mesure. Par exemple, au scénario 2, l'énoncé suivant est présenté : *Un bouton vert mesure _____ trombone(s) et un trombone mesure _____ bouton(s) vert(s).* Cet exercice vise à établir la relation entre les rapports formés à partir de nombres entiers (2 trombones pour 3 boutons verts) et les fractions (un bouton vert mesure $\frac{2}{3}$ de trombone). Notons que la fraction est ici associée à une mesure plutôt qu'à un rapport, ce qui est intéressant pour établir des relations avec la situation précédente (sur les bandes de papier). Au scénario 2, lors de l'intervention auprès des élèves du groupe OR1, l'expérimentatrice ajoute une question non prévue : « Est-ce qu'on peut utiliser les données du tableau pour former des fractions équivalentes à $\frac{2}{3}$? » Cette question vise à lier l'interprétation mesure à celle de rapport. L'écriture fractionnaire est ici utilisée pour décrire les rapports équivalents établis précédemment à partir de nombres entiers (ex. : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, car 4 trombones pour 6 boutons est équivalent à 2 trombones pour 3 boutons). Cette question sera par la suite reprise auprès des autres groupes.

Dans le même ordre d'idées, un exercice dans lequel les élèves doivent regrouper des fractions équivalentes inscrites sur des étiquettes est ajouté dans les trois groupes. Cet exercice vise à amener les élèves à s'appuyer sur le sens rapport pour juger de l'équivalence de deux fractions. Deux problèmes dans lesquels les élèves doivent comparer des rapports étaient prévus, mais ces rapports n'étaient pas représentés par une fraction. Notons que les fractions choisies ne sont pas les mêmes dans le groupe AS que dans les groupes OR, et cela, en raison du peu de connaissances des élèves du groupe AS sur les structures multiplicatives. De plus, étant donné que dans le groupe AS, les scénarios 2 et 3 ne sont pas présentés, l'expérimentatrice a jugé préférable de travailler le sens rapport à partir de divers problèmes avant de procéder à cet exercice qui s'inscrit dans un contexte intramathématique.

7.3.2 Validation interne de la troisième situation

Pour compléter un rapport égal à un autre rapport (identifier la mesure recherchée), l'analyse *a priori* prévoit six conduites⁸⁰.

Conduite A : Mettre en œuvre une stratégie additive fondée sur la différence entre les deux unités de mesure.

Conduite B : Mettre en œuvre une stratégie additive fondée sur la différence à l'intérieur d'une même grandeur.

Conduite C : Évaluer approximativement la mesure.

Conduite D : Procéder à l'itération de chacune des mesures qui composent le rapport.

Conduite E : Mettre en œuvre une stratégie multiplicative fondée sur la relation « fonction ».

Conduite F : Mettre en œuvre une stratégie multiplicative fondée sur la relation « scalaire ».

Le tableau 7.8 présente un aperçu général de l'évolution des conduites au cours de la situation. La relation multiplicative entre le nombre de trombones et le nombre de boutons, au scénario 1, correspond à un nombre entier, ce qui rend la conduite E efficace. C'est d'ailleurs la stratégie la plus souvent adoptée au cours de ce scénario. Elle est cependant rarement adoptée aux scénarios suivants, car la relation multiplicative entre les deux unités de mesure n'est pas entière. Dans ces scénarios, la conduite F s'avère donc plus efficace. Le tableau montre qu'il y a progression des connaissances investies, principalement au cours des scénarios 2 et 3. En effet, de plus en plus d'élèves recourent à des stratégies multiplicatives. D'ailleurs, au terme du scénario 3, les six élèves participant à ce scénario adoptent une stratégie multiplicative (une élève adopte la conduite E et cinq élèves, la conduite F). Rappelons cependant qu'une telle progression ne peut être observée chez les élèves du groupe AS puisqu'ils n'ont pas fait les scénarios 2 et 3.

⁸⁰ Pour une description plus détaillée des conduites anticipées, le lecteur peut se référer à la section 5.2.3.2 du chapitre V (p. 119-120).

Tableau 7.8
Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 3

Mesures des bonshommes pour chacun des scénarios		Conduites adoptées par chacun des élèves pour identifier la mesure manquante du bonhomme B							
Bonhomme A	Bonhomme B	Conduite A	Conduite B	Conduite C	Conduite D	Conduite E	Conduite F	Autres conduites	Aucune prévision
Scénario 1 2 t : 4 bv OR1, OR2, AS	4 t				E1, E5, E7, E8, E9	E2, E3, E4, E6			
	10 bv	E3			E1	E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9			
	40 bv	E7				E2, E3, E4, E6, E9		E8	E1, E5
Scénario 2 2 t : 3 br OR1, OR2	4 t	E1, E2, E3, E4, E5					E6		
	15 br	E2, E3	E1, E5					E4, E6	
	20 t			E2, E6	E3, E4, E5				E1
	21 br						E2, E4	E3	E1, E5, E6
	8 t						E2, E3, E4, E5, E6		E1
	9 br						E2, E3, E4, E5, E6	E1	
Scénario 3 8 br : 6 bv OR1, OR2	100 t	E2		E1			E3, E4, E5, E6		
	12 br	E1		E4, E5, E6			E2, E3		
	15 bv				E1, E4, E5	E6	E2, E3		
	80 br					E6	E1, E2, E3, E4, E5		
	33 bv					E6	E1, E2, E3, E4, E5		

Légende

t : tronbones
bv : boutons verts
br : boutons rouges

7.3.2.1 Scénario 1 (OR1, OR2, AS)

Le tableau ci-dessous présente les mesures à rechercher lors du scénario 1. Ce tableau est complété par les élèves au cours de la rencontre.

	Trombones	Boutons rouges
Lili	2	4
Nana	4	?
Pompon	?	10
Jojo	?	40

Pour identifier la mesure manquante de *Nana*, deux des trois élèves de chacun des groupes OR adoptent immédiatement une stratégie multiplicative fondée sur la relation fonction (conduite E). Aucun élève ne s'appuie sur la relation scalaire, qui aurait pourtant été efficace puisque la relation multiplicative entre le nombre de trombones de *Lili* et de *Nana* est entière. Les autres élèves, ainsi que les trois élèves du groupe AS, procèdent à l'itération de chacune des mesures qui composent le rapport (conduite D). Pour ce faire, les élèves E5, E7 et E8 procèdent à un comptage rythmé, récitant deux nombres par trombone, et les élèves E1 et E9 comptent par intervalle de 2.

Alors que la stratégie multiplicative fondée sur la relation fonction est utilisée par quatre des neuf élèves pour *Nana*, elle est utilisée, pour *Pompon*, par sept des neuf élèves. La relation scalaire n'étant pas entière (le nombre de boutons rouges est de 4 pour *Lili* et de 10 pour *Pompon*), il n'est pas étonnant que les élèves préfèrent s'appuyer sur la relation fonction. Seuls les élèves E1 et E3 du groupe OR1 n'adoptent pas la conduite E. L'élève E1 recourt à la conduite D, stratégie qu'il avait également adoptée pour identifier la mesure manquante pour *Nana* et l'élève E3, qui adoptait un raisonnement multiplicatif fondé sur la relation fonction pour *Nana*, recourt à un raisonnement additif pour *Pompon*. Cette conduite peut s'expliquer par la position de la mesure manquante qui demande de trouver la demie de 10 (*Pompon*), ce qui semble plus exigeant que de trouver le double de 4 (*Nana*). Concernant la tâche *Jojo*, la valeur élevée de la mesure donnée (40) n'affecte pas les stratégies de cinq des neuf élèves qui adoptent la conduite E. Quatre d'entre eux (E2, E4, E6 et E9) avaient aussi adopté cette conduite pour identifier la mesure manquante à la tâche précédente. Cette conduite est cependant nouvelle pour E3. Ainsi, pour elle, la rétroaction du milieu (c'est-à-dire le mesurage effectif des bonshommes) et la possibilité de se référer aux données du tableau semblent avoir favorisé le passage d'une stratégie additive à une stratégie multiplicative. En ce qui concerne les quatre autres élèves, deux d'entre eux (E1 et E5) ne font aucune prévision. D'ailleurs, E1 rencontre les limites de la stratégie D et l'exprime clairement en voyant la donnée numérique 40 : « Oh lui, j'ai aucune idée ! » Les élèves E7 et E8 adoptent une

stratégie additive en prévoyant respectivement 35 (en soustrayant 5 de 40) et 30 (en soustrayant 10 de 40). Ces propositions seront rejetées par E9, donnant lieu à une interaction riche sur la conservation de rapports égaux. L'expérimentatrice s'appuie sur les rapports inscrits dans le tableau pour soutenir E9 dans son argumentation. Les élèves concluent qu'effectivement la première mesure est la moitié de la seconde. Cependant, le choix du rapport (1 pour 2) incite les élèves à valider le nombre recherché par une addition répétée.

E9 : Moi je dis 20 !
 E7 : Ça c'est 10, pis c'est 5, fait que c'est moins 5, fait que 40 moins 5, ça fait... 25... Heu non, 35, c'est 35 !
 E8 : Ben non, c'est 10 de moins !
 E9 : Ben non, là on fait Jojo !
 E8 : Ben c'est ça, moi je dis que c'est 10 de moins parce qu'ici, c'était 5.
 E7 : Moi je dis 35, c'est 35 !!!
 E9 : Non, c'est pas moins 5 !
 EXP : Si on regarde le tableau, est-ce qu'il y a toujours une différence de 5 entre le nombre de boutons et le nombre de trombones ?
 (2 secondes : les élèves regardent le tableau.)
 E8 : Non.
 EXP : Lili, c'était 2 trombones et 4 boutons, est-ce qu'il faut faire moins 5 pour passer de 4 à 2 ?
 E8 : Moi je dis que c'est moins 10 ; $40 - 10$ ça fait quoi déjà ?
 E7 : 30.
 E9 : Ben non, c'est tout le temps la moitié !
 EXP : E9 dit que c'est tout le temps la moitié. Est-ce qu'elle a raison ?
 E7 : De quoi ça ?
 E9 : Ça, c'est toujours la moitié de ça !
 EXP : Est-ce qu'on peut dire que 2, c'est la moitié de 4 ?
 E9 : Oui, $2 + 2$, 4.
 EXP : Est-ce que 4 c'est la moitié de 8 ?
 E8 : Oui, ça marche toujours... Fait que c'est pas 30 d'abord...
 E7 : $20 + 20$, 40... Moi je dis 20 ! C'est 20 !
 E9 : C'est ça que je dis depuis tantôt !

Décontextualisation liée au scénario 1

Au terme du premier scénario, les élèves des trois groupes complètent l'énoncé suivant sans difficulté : *Un bouton rouge mesure _____ trombone(s) et un trombone mesure _____ bouton(s) rouge(s).*

Dans le groupe AS, l'expérimentatrice invite ensuite les élèves à faire une liste de fractions équivalentes à $1/2$, en partant des rapports inscrits au tableau. Cependant, comme le montre l'extrait suivant, les élèves ont beaucoup de mal à comprendre ce que l'expérimentatrice cherche à leur faire produire. Ce décalage dans les interactions relève sans doute de l'écart entre le

contenu de la situation d'action et celui du moment de décontextualisation. On passe effectivement du rapport entre des trombones et des boutons, et, en quelques secondes, ces rapports deviennent des fractions équivalentes. La décontextualisation visée par cette phase est trop brutale pour ce groupe d'élèves.

EXP : Maintenant, si on reprend notre tableau, est-ce que vous êtes capables d'utiliser les données du tableau pour former des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$? (2 secondes) On a dit qu'un bouton mesurait $\frac{1}{2}$ trombone. (Elle écrit $\frac{1}{2}$ au-dessus du tableau.) Est-ce qu'on peut utiliser les données du tableau pour former des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$?

(5 secondes)

EXP : OK, on a vu que chaque fois qu'on a 1 trombone, on a 2 boutons rouges. (Elle place 1 trombone et 2 boutons vis-à-vis.) Donc si j'ai 2 trombones, j'ai 4 boutons rouges. (Elle les place.) Dans 2 trombones pour 4 boutons rouges, on a toujours 1 trombone pour 2 boutons rouges : on a 1 trombone pour 2 boutons rouges ici, et 1 trombone pour 2 boutons rouges ici. Donc, dire qu'on a 1 trombone pour 2 boutons rouges, ou dire qu'on a 2 trombones pour 4 boutons rouges, ça revient au même, c'est équivalent. Donc, on peut dire que 1 pour 2, on peut l'écrire comme ça (elle écrit $\frac{1}{2}$ en haut du tableau), et 2 pour 4 (elle écrit $\frac{2}{4}$ à côté), c'est équivalent. Une demie et deux quarts, c'est équivalent (elle ajoute = entre les deux). En utilisant les données du tableau, est-ce que vous êtes capables de former d'autres fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$?

(6 secondes)

E9 : J'ai pas compris la question...

7.3.2.2 Scénario 2 (OR1, OR2)

Le tableau ci-dessous présente les mesures manquantes du scénario 2. Les trois dernières tâches (*bonshommes*) de ce tableau ne sont pas prévues dans l'analyse *a priori* et ont été traitées à la séance ultérieure.

	Trombones (T)	Boutons verts (B)
Lili	2	3
Nana	4	?
Tutu	?	15
Jojo	20	?
Fifo	?	21
Cocotte	8	?
Bijou	?	9
Mimi	100	?

Pour identifier la mesure manquante de *Nana*, quatre des six élèves répondent 5 en s'appuyant sur une stratégie additive fondée sur la différence entre les mesures T et B associées à *Lili* (conduite A). L'extrait suivant montre l'engagement réel des élèves qui sont dans l'expectative de

la rétroaction, de la validation de leur anticipation. Cet extrait n'est pas anecdotique; il caractérise la dynamique des interactions entre les élèves tout au long de la séquence.

E6 : Moi je dis 6, ça c'est mon opinion.
 E4 : Ah oui, moi aussi je dis 6 finalement.
 EXP : Pourquoi t'as changé d'idée ? Tantôt tu disais 7, pis là, tu dis 6.
 E4 : Non mais c'est parce que je savais que j'avais mis trop de boutons.
 E5 : Moi, je dis 5.
 E6 : Moi 6.
 E5 : Mais c'est parce que regarde (elle prend le tableau). Ici c'était 2, pis on a ajouté 1. Fait que là, c'est 4, fait que si t'en ajoutes 1, ça fait 5.
 EXP : Est-ce que vous avez compris pourquoi E5 dit 5 ? Ce qu'elle a remarqué E5, c'est qu'ici, il y a un bouton vert de plus que de trombones. Donc, elle s'est dit, il faut qu'ici aussi, il y ait un bouton vert de plus que de trombones. Qu'est-ce que vous en pensez ?
 E4 : Tu nous dis ça juste pour faire durer le suspens !
 EXP : Mais vous, vous pensez que c'est 6, est-ce que vous pouvez expliquer pourquoi ?
 E6 : Je suis pu sûre là. Moi je dirais que c'est les deux !
 EXP : OK. On vérifie ?
 E4 : Oui !
 EXP : (Elle sort les boutons verts.) OK, on l'essaie...
 E4 : Ah, c'est peut-être 5 dans le fond. (2 secondes) Ben peut-être 6 aussi.
 E6 : Je sais vraiment pas c'est laquelle la bonne réponse.
 (EXP place les deux premiers boutons.)
 E4 et E6 : C'est 6, c'est 6 !!!
 EXP : On n'a même pas terminé de les placer et vous semblez certaines que c'est 6.
 E4 : Mais moi je le savais déjà que c'était 6.
 E5 : Moi j'hésitais.
 EXP : Donc, ça fait 6. Mais pourtant, ça avait du sens ce qu'elle disait E5, on fait plus 1 ici et plus 1 ici. Comment ça se fait que c'est 6 la réponse, et pas 5 ?
 (E4 et E6 lèvent la main.)
 EXP : Oui, explique-nous ça E6.
 E6 : **Ben moi je me suis dit, y'a 2 trombones, pis ici y'en a 4 (en prenant appui sur le tableau), pis 4, c'est 2 fois plus gros que 2, pis vu que 2, ça donnait 3, j'ai fait 3 fois 2.**
 E4 : (Elle prend appui sur le matériel.) **C'est parce que dans le fond, chaque fois qu'y'en a 2 ici y'en a 3 ici.**

L'extrait montre, de plus, que la rétroaction du milieu conduit les élèves E4 et E6 à formuler adéquatement ce qui fonde le résultat. D'ailleurs, ces deux élèves sont les seules qui adoptent un raisonnement multiplicatif pour identifier la mesure de *Tutu* en trombones, étant donné 15 boutons verts. Pour ce faire, elles font appel à l'interprétation opérateur. Cependant, E4 effectue une seule des deux opérations ($\div 3 \times 2$) à appliquer à la mesure 15 et identifie 5 ($15 \div 3$), et E6 confond l'opération à effectuer en cherchant à diviser 15 par 2. Les quatre autres élèves adoptent, tout comme pour le *bonhomme* précédent, une stratégie additive (conduite A ou B). Ils observent attentivement le tableau et recherchent les régularités en s'appuyant sur des stratégies additives.

Pour identifier la mesure manquante du troisième bonhomme, *Jojo* (20 trombones pour x boutons verts), aucun élève n'adopte une conduite additive (A ou B) ou multiplicative (E ou F). La situation semble ainsi efficace pour faire échec aux stratégies additives. Cependant, les relations multiplicatives entre les nombres ne sont pas établies. Un élève ne se prononce pas (E1), deux adoptent la conduite C (E2 et E6) et trois adoptent la conduite D (E3, E4 et E5). L'élève E3 tente sans succès de procéder mentalement à l'itération de 2 pour 3, alors que E4 et E5 recourent au dessin, ce qui leur permet d'obtenir la mesure manquante. Une fois celle-ci identifiée, E4 explique : « Dans le fond y'a 20 trombones, fait que 20 divisé par 2, parce que y'a 3 boutons verts pour chaque 2 trombones, fait que 20 divisé par 2 ça fait 10, pis y'a 10 paquets de 3, fait que 10×3 , 30. »

Concernant la mesure manquante de *Fifo* (x trombones pour 21 boutons verts), deux élèves (E2 et E4) adoptent pour une première fois un raisonnement multiplicatif avec succès. Dans le groupe OR1, l'élève E1 ne se prononce pas et l'élève E3 repère dans le tableau que le nombre de trombones est 2 fois plus grand entre les *bonshommes* 1 et 2 et entre les *bonshommes* 3 et 4. Il répond ainsi 40 en multipliant par 2 le nombre de trombones de *Jojo* (20). Enfin, dans le groupe OR2, la cloche sonne avant que les élèves E5 et E6 ne puissent faire une prévision.

L'anticipation de la mesure manquante des trois dernières tâches (*Cocotte*, *Bijou* et *Mimi*) se fait à la séance suivante. Le matériel (bonshommes, trombones et boutons) n'est pas disponible. La majorité des élèves utilise désormais une stratégie multiplicative. En effet, tous les élèves à l'exception de E1 adoptent la conduite F pour identifier la mesure manquante de *Cocotte* et de *Bijou*. À noter qu'un raisonnement multiplicatif est engagé par E1, bien que ce raisonnement soit mal contrôlé. Cet élève propose la mesure 4 pour *Bijou* en s'appuyant sur le rapport irréductible de 2 pour 3 donné pour *Lili* : puisque $3 \times 3 = 9$, $2 \times 2 = 4$.

En bref, les stratégies des élèves progressent au cours du scénario 2, lequel s'échelonne sur deux séances. En effet, au plus deux des six élèves adoptent un raisonnement multiplicatif aux quatre premières tâches, alors qu'au moins quatre élèves adoptent un tel raisonnement pour les trois tâches ajoutées. Nous faisons l'hypothèse que le fait de ne pas pouvoir recourir au matériel favorise le recours au raisonnement multiplicatif. Ne pouvant rechercher une solution en s'appuyant sur le matériel, les élèves sont conduits à s'appuyer sur le tableau pour dégager les rapports. La situation vécue préalablement permet de donner du sens aux opérations effectuées sur les nombres.

Décontextualisation liée au scénario 2

Au terme du scénario 2, les élèves complètent l'énoncé suivant avec l'aide de l'expérimentatrice :

Un bouton vert mesure _____ trombone(s) et un trombone mesure _____ bouton(s) vert(s).

À la demande de l'expérimentatrice, les élèves produisent avec peu d'hésitation une liste de fractions équivalentes à $\frac{2}{3}$ et à $\frac{3}{2}$, en utilisant les rapports inscrits dans le tableau.

De façon individuelle, les élèves comparent ensuite la mesure des *bonhommes* suivants, étant donné le rapport de 2 trombones pour 3 boutons verts.

Quel bonhomme est le plus grand ?

- a) *Un bonhomme qui mesure 5 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 5 trombones ?*
- b) *Un bonhomme qui mesure 4 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 2 trombones ?*
- c) *Un bonhomme qui mesure 5 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 4 trombones ?*
- d) *Un bonhomme qui mesure 9 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 6 trombones ?*
- e) *Un bonhomme qui mesure 10 boutons verts ou un bonhomme qui mesure 7 trombones ?*

Les élèves E1 et E3 choisissent le nombre le plus élevé sans tenir compte de l'unité de mesure. Les élèves E2 et E5 dessinent les trombones et les boutons verts en conservant le rapport de 2 pour 3. Cette stratégie, bien que longue, est efficace. Les élèves E4 et E6, pour comparer les mesures, évaluent approximativement les longueurs. Il y a ensuite un retour en grand groupe. Les élèves échangent leurs prévisions, mais ils ont beaucoup de mal à justifier leur choix. L'expérimentatrice valide en recourant au matériel. Cette phase visait à relancer les connaissances des élèves sans support matériel. Encore ici, le passage semble trop abrupt.

7.3.2.3 Scénario 3 (OR1, OR2)

Le tableau ci-dessous présente les mesures à rechercher dans le scénario 3.

	Boutons rouges	Boutons verts
Nana	8	6
Bobo	12	?
Kiki	?	15
Lulu	80	?
Doudou	?	33

Dans ce scénario, pour compléter la mesure de *Bobo*, ni la relation fonction (relation entre 8 et 6) ni la relation scalaire (relation entre 8 et 12) ne correspond à un opérateur multiplicatif entier. La majorité des élèves cherche, tout comme au problème précédent, à adopter la conduite F. Dans le groupe OR1, l'expérimentatrice, voyant que les élèves éprouvent des difficultés, choisit rapidement de les accompagner pour qu'ils établissent l'équivalence entre 8 boutons rouges pour 6 boutons verts et le rapport simplifié, soit 4 boutons rouges pour 3 boutons verts; cela conduit les élèves E2 et E3 à trouver l'ensemble des solutions en s'appuyant sur un raisonnement scalaire. Quant à l'élève E1, il adopte une stratégie additive pour identifier la mesure manquante de *Bobo*. Étant donné sa prévision erronée, il choisit de donner une réponse approximative pour anticiper la mesure manquante de *Kiki*. Comme le montre l'extrait suivant, l'expérimentatrice accompagne l'élève pour qu'il dégage et applique l'opérateur scalaire. Elle pilote fort l'échange en posant des sous-questions et en s'appuyant sur le matériel, ce qui conduit l'élève à faire une prévision juste. Il cherche ensuite à adapter le calcul effectué pour *Kiki* pour trouver la mesure manquante des deux autres *bonshommes*.

L'expérimentatrice a écrit, en haut du tableau de E1 : 4 boutons rouges pour 3 boutons verts.

EXP : Ici, on a 15 boutons verts (en pointant la mesure de *Kiki* dans le tableau), il faut répéter combien de fois 3 boutons verts pour avoir 15 boutons verts ?

(5 secondes)

EXP : Dans 15 boutons verts, on a combien de fois 3 boutons verts ? (Elle prend 15 boutons verts et les met bout à bout.)

E1 : (Il compte.) 5.

EXP : Oui, on répète 5 fois 3 boutons verts pour avoir 15 boutons verts. On sait que chaque fois qu'il y a 3 boutons verts, on a 4 boutons rouges, donc ça va prendre combien de boutons rouges ?

(10 secondes : E1 s'appuie sur le matériel et compte 1, 2, 3, 4 chaque fois qu'il y a 3 boutons verts, sans toutefois utiliser les boutons rouges.)

E1 : 20.

EXP : Quel calcul tu aurais pu faire pour trouver la réponse ?

E1 : 4×5 .

EXP : Exactement. Les trois boutons verts, on les répète 5 fois, donc les 4 boutons rouges, on les répète 5 fois aussi. Peux-tu trouver les autres maintenant ?

E1 : Fait que faut je fasse la même chose de chaque côté ?

EXP : Oui. Ici, on a vu que les boutons verts entre 5 fois, 3×5 , ça fait 15. Fait qu'ici, on a fait 5 fois aussi parce que les boutons rouges entrent 5 fois aussi. On a fait 5 fois ici et 5 fois aussi (en s'appuyant sur le tableau).

(5 secondes)

E1 : Mais c'est 4 fois quoi qui fait 80 (pour *Lulu*) ?

Dans le groupe OR2, devant les difficultés des élèves à adopter la conduite F, l'expérimentatrice choisit de les laisser chercher une solution, sans apporter son aide. Les élèves tentent de

s'appuyer sur le dessin en reportant le rapport de 6 pour 8, mais devant l'échec de cette stratégie, ils donnent finalement une réponse approximative. L'expérimentatrice accompagne donc les élèves pour qu'ils établissent l'équivalence entre 8 pour 6 et 4 pour 3. Ce nouveau rapport conduit les élèves E4 et E5 à recourir au dessin en procédant à l'itération de 4 boutons rouges pour 3 boutons verts pour identifier la mesure manquante de *Kiki*. Une fois la solution trouvée, E4 dégage la régularité : « On avait juste à faire fois 5. » L'élève E6 cherche quant à elle à identifier la fraction équivalente, mais éprouve des difficultés parce qu'elle écrit $3/4 = ?/15$ au lieu d'écrire $3/4 = 15/?$. Pour identifier les mesures manquantes des deux derniers bonshommes, l'élève E6 cherche des fractions équivalentes à $3/4$ et les élèves E4 et E5 adoptent un raisonnement scalaire.

Décontextualisation liée au scénario 3

L'énoncé suivant est complété avec l'aide de l'expérimentatrice: *Un bouton vert mesure _____ bouton(s) rouges(s) et un bouton rouge mesure _____ bouton(s) vert(s).* Les élèves établissent des liens avec l'exercice réalisé après le scénario 2 et produisent sans difficulté une liste de fractions équivalentes à $3/4$, puis à $4/3$, en utilisant les données inscrites dans le tableau.

L'expérimentatrice présente ensuite les 12 étiquettes suivantes: $8/6$, $4/3$, $14/7$, $8/4$, $1/3$, $4/12$, $3/12$, $2/8$, $4/6$, $2/3$, $9/18$, $5/10$ ⁸¹. Dans les deux groupes (OR1 et OR2), les élèves sont en mesure d'identifier l'équivalence de deux fractions lorsque la relation multiplicative entre les termes des fractions est entière. Pour ce faire, ils s'appuient sur la règle $\times y/y$ apprise en classe, c'est-à-dire qu'ils multiplient le numérateur et le dénominateur par un même nombre. Devant les difficultés des élèves à identifier l'équivalence de fractions lorsque la relation multiplicative entre les termes est non entière, l'expérimentatrice choisit de s'appuyer sur la situation d'action. L'extrait suivant (tiré du travail avec le groupe OR1) montre comment l'expérimentatrice amène les élèves à comparer des fractions en s'appuyant sur le sens rapport. Il montre également comment cet échange permet aux élèves, en particulier E3, de dégager la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur pour justifier l'équivalence de rapports.

⁸¹ Un travail sur les fractions équivalentes sera également réalisé avec le groupe AS après la présentation des énoncés de problème, qui suivent ce scénario.

EXP : Est-ce que vous êtes capables de me dire quelle fraction est équivalente à $5/10$? (Elle pointe l'étiquette $5/10$.)
 (13 secondes : les trois élèves cherchent.)
 E1 : Aucune ?
 E2 : Non, y'en a une c'est sûr.
 EXP : Oui, y'a une fraction qui est équivalente à $5/10$. (3 secondes) $5/10$, on peut dire aussi que c'est 5 pour 10. Comme si on avait par exemple 5 trombones pour 10 boutons. Qu'est-ce qui représente le même rapport que 5 pour 10 ?
 (7 secondes : les élèves cherchent.)
 EXP : Si $5/10$ représente 5 trombones pour 10 boutons... Je dessine 5 trombones (elle le fait), chaque fois que j'ai 1 trombone, j'ai combien de boutons ? (3 secondes) Si 5 trombones, ça représente la même longueur que 10 boutons, pour dessiner les boutons ici, il faut que je dessine combien de boutons chaque fois que j'ai 1 trombone ?
 E2 : 2.
 EXP : Oui, il faut que je dessine 2 boutons chaque fois que j'ai 1 trombone : 2 ici, 2 ici, 2 ici, 2 ici, pis 2 ici. Ça fait 5 trombones pour 10 boutons.
 EXP : Est-ce que vous pouvez me donner un rapport équivalent à 5 pour 10 ? (3 secondes) Est-ce qu'on peut dire que 5 trombones pour 10 boutons, c'est équivalent à 1 trombone pour 3 boutons ?
 E3 : Non, pour 2 boutons.
 EXP : Oui, 5 trombones pour 10 boutons, c'est le même rapport que 1 trombone pour 2 boutons. On peut l'écrire avec des fractions (elle écrit $5/10 = 1/2$). 5 trombones pour 10 boutons, c'est équivalent à 1 trombone pour 2 boutons.
 (5 secondes)
 E2 : Ah ! Je le sais ! (Il prend $9/18$.)
 EXP : Ben oui, $5/10$ et $9/18$, c'est équivalent. Le rapport entre le numérateur et le dénominateur est le même : c'est toujours 1 pour 2.
 E3 : Ah OK ! **Ou on pourrait dire, 5 c'est la moitié de 10, pis 9, c'est la moitié de 18.**
 EXP : Oui, exactement.

Notons, par ailleurs, qu'au début de l'exercice, l'élève E5 considère les fractions $8/4$ et $5/10$ comme étant équivalentes. Pour expliquer à l'élève que ce n'est pas le cas, l'expérimentatrice fait référence à la deuxième situation (avec les bandes). Il semble plus difficile de s'appuyer sur le sens rapport pour faire la distinction entre des fractions inverses que sur le sens mesure, où le dénominateur a un rôle différent du numérateur. En effet, selon l'interprétation mesure, le numérateur correspond au nombre de fois qu'est pris un intervalle de mesure $1/n$ et le dénominateur, à la mesure de cet intervalle. Cependant, en s'appuyant sur le sens rapport, comme il n'y a pas d'unité de mesure identifiée, on peut tout aussi bien dire, par exemple, $8/4$ (8 boutons pour 4 trombones) que $4/8$ (4 trombones pour 8 boutons).

7.3.2.4 Énoncés de problème (AS, OR1, OR2)

Deux problèmes de comparaison de rapports visant à favoriser la décontextualisation des connaissances sont présentés aux élèves. Contre toute attente, les élèves du groupe AS, qui n'ont pas réalisé les scénarios 2 et 3, ont des conduites comparables à celles des élèves des groupes OR1 et OR2. Il semble ainsi que les connaissances acquises au moment de la situation d'action n'aient pas été utilisées pour solutionner les problèmes présentés. Une explication possible est la différence entre ces deux activités. En effet, en plus de comporter des contextes différents, les énoncés de problème portent sur la comparaison de rapports, alors que la situation d'action visait essentiellement la production de rapports égaux dans le cadre d'un problème de quatrième proportionnelle. Notons de plus que la solution au premier problème ne fait pas nécessairement appel au sens rapport. Selon les résultats obtenus, le deuxième problème serait donc plus utile que le premier pour développer la compréhension du sens rapport.

- Problème 1 : À partir d'illustrations présentées⁸², les élèves doivent déterminer si ce sont les filles ou les garçons qui recevront le plus de pizza.

Dans les trois groupes, pour identifier si ce sont les garçons ou les filles qui ont le plus de pizza, les élèves se réfèrent généralement à la fraction en tant que quotient d'abord, et à la fraction en tant que partie d'un tout ensuite. En effet, ils tentent de partager les pizzas en parties égales, selon le nombre de personnes, pour identifier la part de chaque personne. Le résultat du partage est ensuite interprété en tant que partie d'un tout pour établir la comparaison. L'expérimentatrice essaie de les amener à s'appuyer sur le sens rapport. Pour ce faire, elle propose directement une stratégie qui s'appuie sur le sens rapport. Par exemple, à la question b), dans laquelle il y a 2 pizzas pour 4 filles et 3 pizzas pour 7 garçons, l'expérimentatrice montre que chez les filles, il y a 1 pizza pour 2 filles, tandis que chez les garçons, lorsqu'on donne 1 pizza pour 2 garçons, un garçon ne reçoit pas de pizza. Enfin, l'expérimentatrice tentera tant bien que mal d'amener les élèves à délaisser les interprétations quotient et partie/tout et à adopter un raisonnement qui s'appuie sur le sens rapport pour établir la comparaison. Or, comme l'illustre l'extrait suivant, les difficultés rencontrées la conduiront elle-même à s'appuyer sur le sens partie/tout. On peut ainsi s'interroger sur la pertinence de ce type de problème pour travailler spécifiquement la comparaison de rapports. Il permet cependant d'articuler l'interprétation partie/tout, quotient et

⁸² Le lecteur peut se référer à la figure 5.1 (p. 118).

rapport par le biais de différentes expressions liées à ces interprétations, par exemple : 3 pour 9, 1 pour 3, partager 1 en 3 parts, $\frac{1}{3}$ par personne.

Question c) : 2 pizzas pour 5 filles et 3 pizzas pour 9 garçons

E4 : C'est les gars. (Elle a séparé les deux pizzas du côté des filles en 2.)

EXP : Selon toi, ce serait les gars. Et les autres, est-ce que vous êtes arrivées à la même réponse ?

E5 : Oui, ben moi oui en tous cas.

(2 secondes)

EXP : Et toi, E6 ?

E6 : Non, moi je dirais que c'est les filles.

EXP : Pourquoi vous pensez que c'est les gars, et toi, pourquoi tu penses que c'est les filles ?

E6 : Moi je le sais, j'ai vu ça de même, juste en regardant.

E4 : Ben moi, j'ai regardé, pis je me suis dit que c'est les gars parce que les gars, sont 9, pis y'en a 3, pis 3 fois 3 est égal à 9.

EXP : OK ?...

(2 secondes)

E4 : Pis c'est ça.

EXP : Donc, s'ils sont 9 pis qu'il y a 3 pizzas, ça veut dire qu'il y a 1 pizza pour 3 personnes, est-ce qu'on peut dire ça ? (Elle encercle chaque pizza avec trois garçons.)

E4 : Oui.

EXP : 3 pizzas pour 9 personnes, et 1 pizza pour 3 personnes, ça revient au même hen ? Ou on pourrait dire que chaque garçon a le tiers d'une pizza. Vous êtes d'accord ?

E4 : Oui.

EXP : Et du côté des filles, maintenant, est-ce qu'on peut dire qu'il y a 1 pizza pour 3 personnes ?

E6 : Non.

E5 : Y'a une personne qu'y'en aura pas.

E6 : Y'en a 3 sur 1 pizza, pis 2 sur l'autre pizza.

EXP : Exactement (elle encercle). Donc ces filles-là, y'en ont autant que les garçons, et ces filles-là (2 pour 1), est-ce qu'elles en ont plus ou moins que les garçons ?

E4 : Y'en ont moins.

EXP : Les autres, vous êtes d'accord ?

E5 : Ben c'est la même affaire.

EXP : Est-ce qu'on a plus de pizza si on partage 1 pizza entre 2 personnes ou si on partage 1 pizza entre 3 personnes ?

E4 : En 2, mais y'en a une qu'y'en a pas, parce que eux, c'est tout égal.

EXP : C'est vrai que c'est plus facile séparer pour que ce soit tout égal pour les garçons, il y a 1 pizza pour 3 personnes, ça arrive juste, on sait que les gars ont chacun le tiers d'une pizza. Mais les filles, si on leur donne chacun le tiers d'une pizza, qu'est-ce qui se passe ? Je sépare cette pizza-là en 3, ces trois filles-là ont le tiers d'une pizza. Je sépare cette pizza-là en 3, ces deux filles-là ont le tiers d'une pizza et il reste un morceau (de $\frac{1}{3}$ d'une pizza). Elles pourraient prendre chacun un petit morceau du morceau qui reste. Donc, elles en ont plus. Est-ce que vous comprenez ?

E4 : Oui.

- Problème 2 : Les élèves doivent identifier, parmi deux mélanges formés de peinture blanche et de peinture rouge, celui qui permet d'obtenir le rose le plus foncé.

Dans les trois groupes, il y a amélioration concernant les conduites adoptées par les élèves. En effet, la fréquence des raisonnements additifs diminue au profit des raisonnements multiplicatifs.

Pour favoriser l'apprentissage des élèves, dans les trois groupes, trois stratégies sont utilisées par l'expérimentatrice : 1) établir des rapports équivalents en dessinant les pots de peinture; 2) demander aux élèves de trouver de nouveaux mélanges permettant d'obtenir la même couleur; 3) modifier les nombres pour faire découvrir les limites des stratégies additives. L'extrait suivant, tiré du travail avec le groupe OR2, présente un échange dans lequel ces trois stratégies sont mises en œuvre. De plus, cet extrait montre bien les difficultés des élèves à choisir entre un raisonnement additif et un raisonnement multiplicatif pour comparer les mélanges.

Mélange 1 : 3 pots de blanc et 1 pot de rouge
Mélange 2 : 5 pots de blanc et 3 pots de rouge

E4 : Moi je dis que le plus foncé c'est 5 pots de blanc avec 3 pots de rouge.
EXP : Est-ce que vous êtes arrivées à ça vous aussi ?
E5 : Oui.
E6 : Moi je dis que c'est égal.
EXP : Pourquoi ?
E6 : Parce que 5 pots de blanc, 3 pots de rouge, c'est 2 de plus pis ici aussi, c'est 2 de plus (pour 3 blancs et 1 rouge).
EXP : OK, donc selon E6, les deux mélanges seraient pareils parce que dans les deux cas, on a 2 pots de blanc de plus que de pots de rouge. Pis vous autres, pourquoi vous pensez que celui-là est plus foncé ?
E4 : Ben, c'est vrai que ça pourrait être égal, par exemple si c'était avec des jetons, mais vue qui faut qu'il soit plus foncé, y'a presque pas de rouge dans le 3 et 1.
E6 : Ben, y'a presque pas de blanc non plus.
E4 : Ben moi, je trouve qu'y'en a quand même assez.
EXP : Pis toi E5, qu'est-ce que t'en penses ?
E5 : Ben moi, j'avais dit 5 pots de blanc pis 3 pots de rouge.
EXP : OK... (2 secondes) Si je les dessine. Dans un mélange, j'ai 3 pots de blanc et 1 pot de rouge (elle dessine). Dans l'autre, on a 5 pots de blanc et 3 pots de rouge.
E5 : C'est ça, c'est lui le plus foncé.
EXP : Ici, on a 1 pot rouge pour 3 pots de blanc.
E6 : Ah...
EXP : Ici, si je prends un pot de rouge pour 3 pots de blanc (elle encercle), il me reste 2 pots de rouge et 2 pots de blanc.
E6 : Ah non ! C'est pas pareil...
EXP : Pour qu'on obtienne le même rose, il faudrait combien de pots de blanc ici ?
(E4 et E6 dessinent en conservant le rapport de 1 pour 3.)
E6 : 9.
EXP : Exactement. Si on a 3 pots de rouge, il faut 9 pots de blanc. Pour avoir la même couleur, il faut qu'il y ait 3 fois plus de blanc que de rouge. Si j'avais 2 pots de rouge, il faudrait

combien de pots de blanc pour obtenir la même couleur ?

(Les élèves dessinent.)

E4 : 6.

EXP : Oui, 1 rouge pour 3 blancs, 2 rouges pour 6 blancs, 3 rouges pour 9 blancs, ça donne la même couleur, parce que le rapport entre le nombre de pots de rouge et le nombre de pots de blanc est le même, on a toujours 1 rouge pour 3 blancs.

(...)

EXP : C'est vrai qu'ici y'a 2 pots de blanc de plus pis ici, y'a deux pots de blanc de plus. Mais imagine si on avait 100 pots de rouge et 102 pots de blanc (elle l'écrit). Penses-tu que ça donnerait le même rose que 1 pot de rouge et 3 pots de blanc ?

E6 : Non.

E4 : 100 pis 102, c'est presque la même chose.

- Décontextualisation après les énoncés de problème (AS)

Les fractions suivantes sont présentées aux élèves du groupe AS, et ils doivent identifier celles qui sont équivalentes : $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{2}{6}$ ⁸³. Les difficultés des élèves conduisent l'expérimentatrice à s'appuyer sur le problème avec les pots de peinture, dans lequel les élèves ont eu recours à l'occasion à des stratégies qui s'appuyaient sur le sens rapport. Cependant, cette intervention engage un pilotage serré de la part de l'expérimentatrice et ne produit d'ailleurs pas l'effet escompté⁸⁴. Les élèves considèrent équivalentes des fractions qui ont soit un numérateur commun, soit un dénominateur commun. Autrement dit, lors des énoncés de problème, les élèves ont pu identifier qu'on obtient le même rose en mélangeant 3 pots de rouge et 6 pots de blanc qu'en mélangeant 5 pots de rouge et 10 pots de blanc parce que, dans les deux cas, il y a 1 pot de rouge pour 2 pots de blanc. Cependant, il s'agit d'une connaissance locale qu'ils ne sont pas en mesure d'utiliser dans cette activité de décontextualisation pour établir l'équivalence de fractions. Nous formulons l'hypothèse que la décontextualisation n'est pas favorisée du fait de la différence entre l'expression des rapports sous la forme d'entiers et l'écriture fractionnaire. Rappelons que dans les groupes OR, une intervention dans laquelle l'écriture fractionnaire est présentée pour représenter un rapport exprimé sous forme d'entiers a suffi. Cependant, pour les élèves du groupe AS, un réel travail d'articulation entre une écriture de type *1 pot de blanc pour 3 pots de rouge* et de type $\frac{1}{3}$ serait nécessaire.

⁸³ Rappelons que les groupes OR et le groupe AS n'ont pas réalisé la même séquence d'activités. Les activités réalisées par les groupes OR sont, dans l'ordre : les trois scénarios prévus, l'activité sur les fractions équivalentes et les énoncés de problème. En revanche, celles réalisées dans le groupe AS sont, dans l'ordre : le scénario 1, les énoncés de problème et l'activité sur les fractions équivalentes.

⁸⁴ Un extrait de verbatim est présenté à l'annexe O.

7.4 Analyse de la situation sur la fraction en tant que partie d'un tout collection et en tant qu'opérateur

Dans la quatrième et dernière situation, la fraction est considérée comme un opérateur. Le but consiste à identifier *si en prenant a/b de n , on obtient le même nombre qu'en prenant c/d de n .* Deux scénarios sont prévus. Au scénario 1, $n < 61$ et représente une quantité de jetons. La validation est assurée par le recours aux jetons. Au scénario 2, $n > 100$ et ne fait référence à aucun contexte extramathématique. La calculatrice est cette fois utilisée pour valider les prévisions.⁸⁵

L'analyse met en évidence un glissement entre la situation prévue et la situation réalisée au scénario 1; la tâche porte alors non pas sur la comparaison de fractions, mais sur la stratégie à mettre en œuvre pour trouver a/b de n . Nous discuterons, lors de l'analyse de cette situation, ce qui a favorisé un tel glissement. Au scénario 2, qui implique des fractions impropres, la référence à l'interprétation partie/tout rencontre ses limites. Les difficultés des élèves conduisent l'expérimentatrice à s'appuyer sur le contexte des jetons en négociant l'interprétation. Elle convoquera alors l'interprétation rapport pour identifier a/b de n ou encore pour comparer deux fractions. Enfin, un intérêt de cette situation est qu'elle favorise l'articulation entre le sens partie/tout, le sens opérateur, le sens mesure, le sens rapport et l'équivalence de fractions. Cependant, comme nous le verrons dans l'analyse, la situation n'est pas nécessairement optimale pour favoriser l'interprétation opérateur de la fraction. Un scénario de réduction ou d'agrandissement d'une figure serait à envisager pour compléter cette situation.

7.4.1 Activités réalisées auprès de chacun des groupes

Le tableau 7.9 présente les activités réalisées auprès de chacun des groupes d'élèves ainsi que le temps accordé à chacune.

⁸⁵ Le lecteur peut se référer à la section 5.2.4 du chapitre V (p. 120-127) pour obtenir une description plus détaillée de la quatrième situation.

Tableau 7.9
Répartition du temps de chacune des activités de la situation 4 pour les trois groupes d'élèves

	OR1	OR2	AS
Activité d'introduction	2 min 55 s	5 min 55 s	5 min 20 s
Tâches ajoutées à l'activité d'introduction	x	x	17 min 30 s Fin séance 7*
Scénario 1	7 min	6 min 55 s	x
Tâche A ($n = 40$ jetons)			
Tâche B ($n = 60$ jetons)	6 min 10 s Fin séance 7	6 min Fin séance 7	x
Scénario ajouté	5 min 10 s	6 min 10 s	9 min 20 s
Scénario 2	23 min 50 s	19 min 20 s	x
Total	45 min 5 s	44 min 20 s	32 min 10 s

*La première tâche ajoutée se déroule à la septième séance et les trois autres, à la huitième séance.

Le temps accordé à la quatrième situation est moins important dans le groupe AS (environ 30 minutes) que dans les deux groupes OR (environ 45 minutes), ce qui s'explique par le fait que moins d'activités ont été effectuées auprès de ce groupe.

Rappelons qu'une activité d'introduction précède le scénario 1 visant à s'assurer que les élèves sont en mesure d'identifier a/b de n à l'aide de matériel. En raison des difficultés éprouvées par les élèves du groupe AS, des tâches introductives sont ajoutées, et le temps consacré à l'introduction se trouve donc prolongé. Conséquemment, les scénarios 1 et 2 n'ont pu être réalisés auprès du groupe AS.

Certains des élèves adoptent des conduites qui déstabilisent l'expérimentatrice aux tâches introductives et au premier scénario. Ses interventions visent alors, comme nous le verrons, à enseigner des procédures. La situation ne se déroulant pas tout à fait comme prévue à l'analyse *a priori*, un scénario est ajouté auprès de chacun des groupes pour mieux prendre en compte leurs conduites et connaissances. Un scénario est ainsi ajouté, à la suite du scénario 1, dans lequel les élèves doivent comparer $4/5$, $9/10$ et $14/15$ d'une collection, la valeur de n (la cardinalité de la collection) n'étant pas indiquée dans les groupes OR. De plus, l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même pour chacune des fractions, visant ainsi à mettre en échec les stratégies additives, et la rétroaction se fait à partir de trois collections dessinées (et non réelles) de 30

jetons disposés de la même manière (6 lignes de 5 jetons) de façon à conserver les traces de l'effet de chacun des opérateurs sur les collections.

7.4.2 Validation interne de la quatrième situation

Cette section se divise en deux sous-sections : nous procédons d'abord à une analyse didactique de l'activité d'introduction, et nous confrontons ensuite les conduites des élèves aux deux scénarios prévus ainsi qu'au scénario ajouté, avec les conduites prévues par l'analyse *a priori*.

7.4.2.1 Activité d'introduction

Avant de procéder au scénario 1, les élèves sont invités à échanger sur les manières d'obtenir les $\frac{3}{5}$ d'une collection de 30 jetons. Dans les deux groupes OR, la première stratégie proposée est la stratégie du double comptage (niveau B)⁸⁶, et la relation avec le calcul $30 \div 5 \times 3$ est rapidement établie.

Dans le groupe AS, les élèves éprouvent des difficultés à recourir de façon efficace à une stratégie permettant d'identifier les $\frac{3}{5}$ de 30 jetons. Des tâches semblables sont donc ajoutées. Le tableau 7.10 présente les conduites des élèves de ce groupe pour les cinq tâches présentées. Il s'agit, dans chaque tâche, d'identifier a/b de n jetons, n est multiple de b et se situe entre 19 et 31. Notons que les deux premières tâches sont effectuées à la septième séance et les trois dernières, à la huitième séance.

Tableau 7.10
Conduites adoptées par les élèves du groupe AS
à l'activité d'introduction de la situation 4

	Échec	Stratégie du double comptage (niv. B)	Stratégie numérique
3/5 de 30 jetons	E7, E8, E9		
3/4 de 20 jetons	E7	E8, E9	
5/6 de 18 jetons	E7, E8, E9		
4/7 de 21 jetons	E7, E8, E9		
2/5 de 25 jetons		E8, E9	E7

⁸⁶ Les différentes stratégies pour identifier a/b de n objets sont définies aux pages 60 et 61.

Pour identifier les $\frac{3}{5}$ de 30 jetons, E8 et E9 travaillent ensemble et E7 les regarde. Elles font des groupements de 5 (obtenant ainsi 6 groupements) et prélèvent 3 groupements. Elles obtiennent ainsi 15 jetons. Cette stratégie est issue d'une combinaison entre la stratégie du double comptage (prendre 3 objets pour chaque groupement de 5) et la partition sens-partage (prendre 3 groupements – de 6 – sur 5 groupements). Dans son étude portant sur les connaissances sur la fraction d'élèves de fin primaire, Ghailane (2015) relève également des glissements entre ces deux stratégies.

L'expérimentatrice précise qu'en prenant 3 groupements sur 6, on obtient la moitié des 30 jetons et non les $\frac{3}{5}$. Elle enseigne alors aux élèves à contrôler la stratégie du double comptage. À la tâche suivante, les élèves E8 et E9 contrôlent cette stratégie pour identifier les $\frac{3}{4}$ de 20 jetons et la décrivent au profit de E7.

Cependant, à la séance suivante, les élèves E8 et E9 ne recourent plus efficacement à la stratégie du double comptage pour identifier les $\frac{5}{6}$ de 18 jetons. Elles obtiennent toutes les deux le résultat 3, mais en utilisant des procédés différents. L'élève E8 fait des groupements de 5 (en raison du numérateur 5) et, comme il lui reste 3 jetons, répond 3. L'élève E9 fait des groupements de 6 et prélève 5 jetons par groupement, mais considère les jetons non prélevés. L'élève E7, s'appuyant sur le sens restreint de la relation partie/tout, interprète le dénominateur comme étant le nombre d'éléments d'une collection et a d'abord du mal à comprendre qu'on puisse prendre $\frac{5}{6}$ de 18 jetons. Tenant compte de l'écart entre 5 et 6, il choisit finalement de conserver un seul jeton. Comme le montre l'extrait suivant, l'expérimentatrice s'appuiera sur le procédé de E9 pour fixer la stratégie du double comptage. Le choix de prioriser cette stratégie repose notamment sur son potentiel à lier le sens partie/tout en contexte de tout collection et l'équivalence de fractions. Dans ce qui suit, l'extrait mis en caractère gras illustre l'interrogation de E7 sur la relation entre *partie/tout* et *équivalence des fractions*. La suite montre comment l'expérimentatrice enseigne la stratégie du double comptage et s'appuie sur cette dernière pour établir l'équivalence entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{15}{18}$.

- | | |
|-------|--|
| E8 : | (Elle fait des paquets de 5.) Il nous en reste 3. |
| E9 : | (Elle fait 6 groupes, prend 5 objets dans chacun des groupes, et considère les 3 objets restants.) Oui, moi aussi il m'en reste 3. |
| E7 : | Mais c'est combien qu'il faut prendre ? |
| EXP : | Vous devez prendre les $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$ de vos jetons (en pointant $\frac{5}{6}$ écrit sur une feuille). |
| E7 : | Ça veut dire que t'en as 6, pis t'en prends 5. |
| EXP : | Mais est-ce que tu peux prendre les $\frac{5}{6}$ de tes 18 jetons ? |
| E7 : | Ben si je veux faire la même affaire, 5 sur 6... Ben je fais ça (il tasse tous ses jetons sauf 1). |

EXP : Donc, ça fait combien de jetons, si tu prends les $\frac{5}{6}$ de tes jetons ?
 E7 : Un.
 EXP : Donc, selon toi, pour prendre les $\frac{5}{6}$ de 18 jetons, il faut prendre 1 jeton ?
 E7 : **Ben, je sais pas si c'est pareil quand on fait avec 18 que quand on fait avec 5.**
 E8 : Ben moi, je pense pas que c'est ça.
 (...)

 E9 : Ah oui ! Je pense que je le sais ! Y faut faire ça de même. T'en mets 6. (Elle fait des paquets de 6.)
 E8 : Ben non ! Tu faisais des paquets de 5 tantôt !
 E9 : Oui, mais faut en mettre 6. Attends (elle finit de faire ses paquets). Regardez bien là. J'en ai 6, pis 6, pis 6, OK ? Pis là, j'en prends 5 : 5, 5, 5. Fait que, il m'en reste 3 !
 EXP : Quand tu prends les $\frac{5}{6}$, t'en prends combien ?
 E9 : 5... Heu non, 6... Heu non, 3, j'en ai pris 3.
 EXP : Non, 3, c'est ce qui reste. Si tu prends $\frac{5}{6}$, tu en prends 5 chaque fois que tu en as 6 (elle refait les paquets de 6). Donc ici, tu en prends 5 sur 6, 5 sur 6 ici et 5 sur 6 ici. En tout, ça fait 5, 10, 15. Ça en fait 15 : $\frac{5}{6}$ de 18, ça donne 15. Est-ce que vous comprenez ?
 E8 : Oui.
 EXP : Pour trouver à quoi ça correspond, $\frac{5}{6}$ de 18, E9, elle a fait des paquets de 6, et elle a pris 5 jetons par paquet. Si j'en prends 5 chaque fois qu'il y en a 6, ça me donne 15 sur 18 (elle écrit $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$). $\frac{5}{6}$ et $\frac{15}{18}$, ce sont des fractions équivalentes.

À la tâche suivante, malgré l'enseignement de la stratégie du double comptage qui vient tout juste d'être réalisé, les élèves ont du mal à la mettre en œuvre pour identifier les $\frac{4}{7}$ de 21 jetons. Les conduites des élèves montrent la résistance d'une conception partie/tout élémentaire où les parties prises sur le nombre de parties totales ne peuvent être que des éléments, et non des sous-collections. Ainsi, si l'élève E8 fait trois groupements de 7 jetons, elle ne considère ensuite qu'un seul de ces groupements pour prélever 4 sur 7 jetons. Elle observe les 3 jetons restants et répond 3. L'élève E9, tout comme à la tâche précédente, utilise la stratégie du double comptage, mais considère, de la même manière que E8, les jetons non prélevés. Elle explique : « J'en enlève 4 dans chaque, fait qu'y'en reste 9. » Ces deux conduites sont de prime abord étonnantes. Elles peuvent cependant s'interpréter à l'aune de la consigne laquelle demande de « prendre ... », ce qui peut suggérer à l'élève de retirer les jetons et donc, de considérer ce qui reste à l'image du retrait qui caractérise la soustraction. L'élève E7, quant à lui, ne recourt pas aux jetons et adopte plutôt une stratégie numérique. Il verbalise son raisonnement ainsi : « 3 fois 7, ça donne 21, fait que c'est 3 », identifiant ainsi le $\frac{1}{7}$ de 21. Une telle stratégie est efficace lorsque l'opérateur fractionnaire est décomposé en deux opérateurs entiers. Ainsi, après avoir identifié la valeur de $\frac{1}{b}$, on peut multiplier par a pour identifier celle de $\frac{a}{b}$. La stratégie de E7, bien qu'incomplète, marque une avancée dans le savoir non seulement par rapport à ses propres conduites, mais aussi au regard de celles des deux autres élèves. L'expérimentatrice choisit cependant d'enseigner à nouveau aux élèves la stratégie du double comptage, ne sachant pas, dans le feu de l'action, capitaliser sur la stratégie numérique de E7 comme moyen d'invalidiser les stratégies de E8 et E9.

Pour identifier les $\frac{2}{5}$ de 25 jetons, E7 répond 10 sans recourir aux jetons. Il explique : « Ben tu fais 5, 10, 15, 20, 25 (en levant un doigt pour chaque nombre), ça va faire 5, pis t'en prends 2 dans chaque, fait que ça fait 10. » Voyant qu'il a impressionné l'expérimentatrice, E7, fier de lui, s'exclame : « J'ai pas besoin des jetons moi ! » Les élèves E8 et E9 utilisent efficacement la stratégie de partition enseignée. L'expérimentatrice conclut en établissant la relation entre la stratégie du double comptage et les opérations $\div b \times a$, liant ainsi le sens partie/tout et le sens opérateur. La division étant généralement fortement associée par les élèves au sens partage, où $\div b$ correspond à partager en b groupements pour identifier le nombre d'éléments par groupement, l'établissement d'une telle relation conduit à travailler le sens regroupement de la division, où $\div b$ consiste à former des groupements de b éléments pour identifier le nombre de groupements.

7.4.2.2 Scénario 1, scénario ajouté et scénario 2

Pour comparer les opérateurs fractionnaires, six conduites sont anticipées dans l'analyse *a priori*⁸⁷.

- Conduite A :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $c > a$ et $d > b$ (raisonnement erroné).
- Conduite B :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $d < b$ (raisonnement erroné).
- Conduite C :* Lorsque les fractions sont inférieures à 1, la transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $|d - c| < |b - a|$, et lorsque les fractions sont supérieures à 1, la transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $|c - d| > |a - b|$ (raisonnement erroné).
- Conduite D :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si la surface obtenue en prélevant c/d d'un tout continu est plus grande que celle obtenue en prélevant a/b de ce même tout (raisonnement juste).
- Conduite E :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si le rapport exprimé par c/d est plus grand que celui exprimé par a/b (raisonnement juste).
- Conduite F :* La transformation opérée par c/d est plus grande que par a/b si $cn/d > an/b$, n correspond à l'état initial (raisonnement juste).

Le tableau 7.11 présente un aperçu général de l'évolution des conduites au cours de la quatrième situation tenant compte des valeurs attribuées aux variables numériques des différents scénarios.

⁸⁷ Le lecteur peut se référer aux pages 125 et 126 du chapitre V pour obtenir une description plus détaillée de chacune des conduites.

Les résultats montrent qu'il y a une progression dans les stratégies adoptées par les élèves au cours du scénario 1, présenté aux groupes OR1 et OR2. En effet, à la tâche A, la majorité des élèves s'appuie sur l'écart entre le numérateur et le dénominateur pour comparer des fractions (conduite C), alors qu'à la tâche B, tous les élèves appliquent les deux opérateurs entiers, qui composent chacun des opérateurs fractionnaires, sur la quantité initiale et comparent ensuite les résultats obtenus (conduite F). L'expérimentatrice juge, à la suite des tâches introductives et du scénario 1, qu'il est nécessaire de poursuivre le travail sur les collections afin de consolider l'emploi de deux opérateurs entiers pour traiter la fraction en tant qu'opérateur. Ce scénario est présenté aux trois groupes d'élèves. Cependant, dans les groupes OR, le nombre de jetons n'est pas indiqué, ce qui rend l'utilisation de la conduite F difficile. Au cours de ce scénario, la conduite la plus fréquente, adoptée par sept des neuf élèves, consiste à considérer la fraction ayant le plus petit dénominateur comme étant la plus grande (conduite B). Au scénario 2, présenté uniquement aux groupes OR, les conduites E et F, les plus élaborées sur le plan mathématique, sont adoptées par un nombre de plus en plus important d'élèves pour les cinq premières comparaisons à effectuer. En effet, lors des deux dernières comparaisons, les conduites E et F ne sont adoptées par aucun élève, résultat qui peut s'expliquer par la complexité des fractions à comparer. Notons qu'au scénario 2, il est parfois difficile d'identifier les conduites adoptées par les élèves, car les contraintes de ce scénario ne nécessitent pas la formulation et la validation des stratégies.

Tableau 7.11

Conduites adoptées par les élèves à chacun des scénarios de la situation 4

Variables numériques pour chacun des scénarios			Conduites adoptées par chacun des élèves							
Scénario pour chacun des groupes	Fractions à comparer	Valeur de n	Conduite A	Conduite B	Conduite C	Conduite D	Conduite E	Conduite F	Autres conduites	Conduite non identifiée
Scénario 1 (OR1, OR2)	Tâche A : 15/20, 3/4, 4/5 et 7/10	40			E1, E3, E4, E5		E6	E2		
	Tâche B : 15/20, 3/4, 4/5 et 7/10	60						E1, E2, E3, E4, E5, E6		
Scénario ajouté (OR1, OR2, AS)	4/5, 9/10 et 14/15	AS : 30 OR : absente		E1, E3, E5, E6 E7, E8, E9,	E2		E4			
	11/12 et 12/11	396				E3, E4, E5		E2	E1	E6
	13/3 et 17/3	126				E4		E2		E1, E3, E5, E6
	3/4 et 3/5	620			E5	E3, E4	E6	E2	E1	
Scénario 2 (OR1, OR2)	2/3 et 4/6	414	E5	E1, E4	E4		E2, E3, E6	E2		
	8/5 et 8/6	390					E4, E5, E6	E1, E2, E3		
	11/13 et 13/15	195		E1, E3, E4, E5, E6	E2					
	18/17 et 9/8	136							E5	E1, E2, E3, E4, E6

- Scénario 1 (OR1 et OR2)

Tâche A

Si je prends les 15/20 de 40 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les :

	Anticipation	Vérification
3/4 de 40 jetons		
4/5 de 40 jetons		
7/10 de 40 jetons		

La conduite la plus fréquente, adoptée par quatre des six élèves (E1, E3, E4, E5), consiste à considérer l'écart entre le numérateur et le dénominateur (conduite C). Ainsi, les fractions 3/4 et 4/5 sont considérées par les élèves E1, E4 et E5 comme équivalentes, et la fraction 15/20 est considérée par E3 et E5 comme étant plus petite que 4/5. L'élève E3 explique son raisonnement : « pour celle-là (en pointant 15/20), chaque fois t'en prends pas 5 », marquant encore une fois la prégnance d'une conception élémentaire de type partie/tout. Précisons que l'élève E4 adopte d'abord la conduite F : elle identifie que 3/4 de 40 jetons correspond à 30 jetons, mais comme elle ne trouve pas le résultat de 15/20 de 40 jetons, elle abandonne rapidement cette stratégie et se rabat sur la conduite C. L'élève E6, quant à elle, considère d'abord 15/20 et 3/4 comme étant équivalentes (conduite E), mais les explications de ses coéquipiers la conduisent à remettre en doute sa prévision. Enfin, l'élève E2 tente d'identifier le résultat pour chaque transformation, ce qui entraîne E1 et E3 dans cette recherche. La tâche initiale visait à comparer les fractions pour anticiper le résultat de l'application de différents opérateurs fractionnaires sur une même quantité et, ensuite, à valider les prévisions par le recours aux collections. Cependant, les élèves cherchent à identifier le résultat de $a/b \times n$, et l'expérimentatrice glisse vers l'enseignement de la stratégie du double comptage. C'est le résultat obtenu après l'application des deux opérateurs entiers qui composent l'opérateur fractionnaire sur la quantité initiale qui servira à la comparaison de fractions. Ainsi, les élèves n'utilisent pas la stratégie souhaitée, mais utilisent néanmoins une stratégie pertinente pour solutionner le problème proposé. Cependant, cette stratégie faisant appel à des connaissances qui ne sont que partiellement maîtrisées par les élèves, l'expérimentatrice se voit contrainte d'accompagner les élèves.

L'extrait suivant, tiré du groupe OR1, montre comment l'expérimentatrice interagit avec les élèves pour qu'ils mettent en œuvre la stratégie du double comptage et qu'ils lient cette stratégie à l'application de deux opérateurs entiers. Ce pilotage, autrement dit les décisions prises sur le vif, vise à enseigner la procédure de l'application de deux opérateurs entiers par un travail sur les collections.

EXP : OK, maintenant (elle met le tableau sur le bureau), je vous demande : si on mettait 40 jetons sur la table et qu'on prenait les $15/20$ de ces jetons-là, est-ce qu'on prendrait la même quantité que si on en prend les $3/4$ des 40 jetons, les $4/5$ des 40 jetons ou les $7/10$ des 40 jetons (en pointant sur le tableau) ? Est-ce qu'il y a des fractions ici qui vont conduire au même nombre de jetons selon vous ?

E3 : Attends...

(5 secondes : les élèves cherchent.)

E3 : Moi je pense que...

E1 : C'est toute différent.

(3 secondes : les élèves cherchent)

E3 : Non, moi je suis sûre que y'a un égal. (4 secondes) Moi je dis que $4/5$ c'est égal à $15/20$. Mais je suis pas sûre parce qu'ici c'est plus 1 et ici plus 5. Celle-là c'est plus petit je pense (en pointant $15/20$). (5 secondes) Peut-être le $15/20$ pis le $3/4$ ce serait pareil...

EXP : Donc, tu dis que peut-être que $15/20$ et $3/4$, c'est équivalent.

E3 : Ben je pense... parce que 3 fois 5 ça donne 15.

E2 : Mais attends, tantôt, ben pourquoi on a fait... ben est-ce que ça a donné 18 jetons ?

EXP : Tantôt, on cherchait les $3/5$ de 30 jetons et on avait trouvé 18 jetons.

E2 : Pis là, on demande de trouver les jetons ?

EXP : Là, on vous demande pas de dire c'est combien de jetons, on veut juste savoir si là-dedans, y'a des fractions qui nous permettent d'arriver au même nombre de jetons. Si je prends les $15/20$ de 40 jetons, est-ce que j'arrive au même résultat que si je prends les $3/4$ de 40 jetons, est-ce que c'est la même chose que si je prends les $4/5$ de 40 jetons, les $7/10$ de 40 jetons ?

(4 secondes : les élèves cherchent.)

E2 : C'est pas la même affaire. (2 secondes) Ben ça fait combien $15/20$ de 40 jetons ?

EXP : Combien tu penses que ça fait ?

E2 : Je sais pas...

E3 : $15/20$, je sais pas, mais je sais que si on en prend 20, c'est la moitié.

EXP : Si on voulait le faire pour vrai, si on veut prendre les $15/20$ de ces 40 jetons-là (elle les a déjà placés sur le bureau), comment on va faire, est-ce que tu peux nous dire ça E1 ?

(L'expérimentatrice accompagne les élèves dans la recherche du résultat de chacune des transformations, et ce, en s'appuyant sur la stratégie du double comptage, niveaux B et C⁸⁸).

⁸⁸ Les trois niveaux de la stratégie du double comptage sont décrits aux pages 60 et 61.

Enfin, plus de temps sera consacré à l'enseignement d'une procédure permettant de prélever a/b de n jetons qu'à la comparaison de fractions. Le glissement de tâche auquel a conduit l'interaction peut s'expliquer par un effet pérenne des tâches introductives sur ce scénario. En effet, les tâches introductives visaient, dans l'analyse *a priori*, à s'assurer que les élèves puissent identifier a/b de n pour permettre la validation de leurs anticipations, ce que les élèves des groupes OR ont effectivement démontré. Cependant, les élèves choisissent ensuite de rechercher le nombre de jetons obtenus pour chacune des transformations. Chacune des fractions n'est donc plus comparée à la fraction initiale (15/20). En effet, les élèves cherchent à identifier le nombre obtenu par chacune des transformations, et l'expérimentatrice, guidée par les questions des élèves, les soutient dans cette recherche tout en les conduisant à comparer les fractions données entre elles. Ainsi, la situation d'action et celle de validation se confondent, et l'expérimentatrice n'a plus vraiment d'autres choix que d'enseigner une procédure. Les caractéristiques de la tâche ne permettaient pas de contrer cette stratégie, ce qui conduira d'ailleurs l'expérimentatrice, comme nous le verrons plus loin, à modifier le milieu.

Par ailleurs, il semble intéressant de noter qu'au départ, ce sont essentiellement les élèves qui utilisent la stratégie du double comptage (niveau B) alors que l'expérimentatrice tente de les amener à dégager les calculs qui modélisent leurs actions; mais rapidement, les rôles s'inversent. En effet, une fois que les élèves utilisent la stratégie numérique attendue, l'expérimentatrice s'appuie sur les jetons, cherchant ainsi à s'assurer que les élèves associent les calculs aux actions posées dans la stratégie du double comptage. Deux éléments essentiels semblent conduire l'expérimentatrice à accorder une grande importance au sens : son expérience professionnelle et le manque de robustesse de la situation (Ste-Marie, 2013)⁸⁹. D'une part, l'expérience de l'expérimentatrice comme orthopédagogue la conduit à accorder une grande importance au sens, cherchant ainsi à éviter une accumulation de « règles »

⁸⁹ Ste-Marie (2013) identifie trois ordres de contrainte concernant la gestion didactique des situations. La chercheuse tient ainsi compte 1) de l'articulation entre les propositions didactiques et les pratiques professionnelles des enseignants, 2) du rapport entre la robustesse d'une situation et les compensations didactiques; 3) des imprévus d'une situation liés aux interactions didactiques.

difficilement utilisables dans des situations à venir. D'autre part, la quatrième situation contraint l'expérimentatrice à compenser la faiblesse du milieu en cherchant à enseigner la stratégie de façon à ce que les élèves lui donnent du sens.

Tâche B

Si je prends les 15/20 de 60 jetons, prendrais-je le même nombre de jetons que si je prends les :

	Anticipation	Vérification
3/4 de 60 jetons		
4/5 de 60 jetons		
7/10 de 60 jetons		

À l'image des interactions à la tâche A, la tâche sera centrée sur la recherche du résultat de la transformation d'une collection par différentes fractions. Cependant, on observe une progression évidente entre les conduites adoptées à la tâche A et à la tâche B. En effet, alors qu'un seul élève opte pour la conduite F à la tâche A, les six élèves y recourent à la tâche B. Ainsi, aucun élève ne recourt à la conduite C (conduite qui s'appuie sur un raisonnement additif), adoptée par quatre élèves à la tâche précédente. Ce progrès s'explique sans doute en grande partie par l'institutionnalisation de la stratégie du double comptage. Ainsi, les élèves travaillent ensemble pour identifier les calculs qu'ils doivent effectuer et le résultat de ces calculs.

Dans les deux groupes, un épisode semble faire basculer les élèves d'une interprétation partie/tout collection à une interprétation opérateur. Alors que les élèves sont dans la recherche d'un résultat, l'expérimentatrice leur demande s'il est possible de s'appuyer sur la tâche A pour trouver ce qui est équivalent à 15/20 de 60 jetons. Les élèves E3 et E6 comprennent alors que la valeur de n n'a pas d'importance. Les autres élèves n'en sont pas certains. Tout comme à la tâche précédente, la validation se fait à l'aide de la stratégie du double comptage, et les calculs qui permettent de la modéliser sont dégagés. L'expérimentatrice conclut en déclarant que 15/20 et 3/4 sont des fractions équivalentes

puisqu'elles produisent le même effet sur un nombre, peu importe ce nombre. Dans le groupe OR2, pour mettre à l'épreuve ce qui a été institutionnalisé, E4 propose de vérifier avec un autre nombre; ce qui est une intervention tout à fait intéressante. En prenant cette fois appui sur la calculatrice, les élèves constatent que $\frac{3}{4}$ de 100 et $\frac{15}{20}$ de 100 sont équivalents par l'application de deux opérateurs entiers.

- Scénario ajouté (OR1, OR2 et AS)

Dans les groupes OR, l'expérimentatrice demande si on obtient plus, moins ou autant de jetons lorsqu'on prend les $\frac{4}{5}$, les $\frac{9}{10}$ et les $\frac{14}{15}$ d'une collection de jetons. Ce scénario investit la comparaison de fractions sans toutefois que le nombre de la collection initiale soit donné, visant ainsi à bloquer la comparaison des fractions sur la base du résultat obtenu par l'application de chacun des opérateurs fractionnaires sur une même quantité. L'intérêt de l'ajout de ce scénario réside de plus dans la capitalisation de ce qui a été dégagé au terme du scénario 1, c'est-à-dire que le nombre de jetons n'a pas d'importance.

Sur une feuille est inscrit :

- *Prendre les $\frac{4}{5}$ d'une collection de jetons*
- *Prendre les $\frac{9}{10}$ d'une collection de jetons*
- *Prendre les $\frac{14}{15}$ d'une collection de jetons*

Le nombre de jetons n'étant pas indiqué, aucun élève ne recourt à la conduite F (trouver le résultat) adoptée par les six élèves à la tâche précédente. Un seul élève, E2, considère les fractions comme étant équivalentes en raison de l'écart entre le numérateur et le dénominateur, qui est le même pour chacune des fractions (conduite C). Il se réfère à la stratégie du double comptage et retient que dans chacun des groupements, « y'en a un que tu prends pas », sans considérer le nombre de jetons prélevés. Les autres élèves, toujours dans les deux groupes OR, comparent d'abord $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$ et reconnaissent que ce ne sont pas des fractions équivalentes parce que $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. Cependant, par la suite, pour comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$, ils utilisent une règle dégagée en classe : plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande (conduite B) et concluent que $\frac{4}{5}$ est plus grand que $\frac{8}{10}$. La prégnance de cette fausse règle est étonnante puisque les élèves possèdent les arguments mathématiques pour la

réfuter. Une seule élève, E4, considère $9/10$ comme étant une fraction plus grande que $4/5$ parce que $4/5 = 8/10$ et que $9/10 > 8/10$. Dans les deux groupes, les élèves écoutent les prévisions des autres et remettent en question leur raisonnement. L'extrait suivant présente un échange tiré du groupe OR2.

E6 : Ben moi, pour commencer, pour $4/5$ j'ai fait fois 2, fait que ça fait 10, pis pour avoir une fraction équivalente, je vais faire fois 2 ici aussi, pis ça fait 8. Pis ici (en pointant $14/15$), c'est fois 3, pis 4 fois 3 ça fait 12.
 (...)

EXP : OK, donc quelle fraction serait la plus grande selon vous ?

E4 : $4/5$.

E5 : Moi aussi je dis $4/5$.

E6 : Attends... Heu... Oui.

E4 : Hen mais ch'u pas sûre là parce que tantôt, t'as dit 8 sur 10, pis ici c'est 9 sur 10.

E6 : Oui, mais quand le dénominateur est plus petit ben c'est plus gros.

E4 : Peut-être, mais tantôt quand t'as fait fois 2, fois 2, ça t'a donné 8 sur 10, tandis qu'ici c'est 9 sur 10.

E6 : Ouin... sur 10, c'est vrai que ça, ça ferait $8/10$... Mais moi je dis que c'est $4/5$.

E4 : Moi je dis que c'est $9/10$.

Dans le groupe AS, les fractions à comparer sont les mêmes, mais étant donné qu'ils n'ont pas fait le scénario 1, la valeur de n est donnée ($n = 30$). Les trois élèves hésitent entre deux prévisions : considérer qu'on obtient le même résultat en prélevant $4/5$, $9/10$ et $14/15$ de 30 jetons (conduite C) ou considérer qu'on obtient plus de jetons en prenant les $4/5$ de 30 jetons (conduite B). Ils jugent finalement que $4/5$ est la plus grande fraction en justifiant qu'ils ont appris en classe que plus le dénominateur est petit, plus les « morceaux » sont gros⁹⁰.

Dans les trois groupes, la rétroaction à l'aide de trois collections dessinées de 30 jetons conduit les élèves à modifier leur prévision. La stratégie du double comptage est utilisée pour prélever, d'abord, $4/5$ de 30 jetons, et ce, en établissant la relation avec les deux opérateurs entiers qui composent chacun des opérateurs fractionnaires. De plus, l'expérimentatrice met en évidence, sur la base des dessins produits, l'équivalence entre $4/5$ et $24/30$. En collaboration avec les élèves, l'équivalence est aussi établie pour les deux autres énoncés, soit entre $9/10$ et $27/30$ ainsi qu'entre $14/15$ et $28/30$. Au terme de la validation,

⁹⁰ Les élèves des groupes OR et ceux du groupe AS proviennent de deux écoles différentes. Il semble donc que cette règle de comparaison ne soit pas propre à l'épistémologie d'enseignants particuliers mais propre à l'institution scolaire.

l'expérimentatrice interroge les élèves : *Je dois prendre combien de jetons, chaque fois qu'il y en a 10 (ensuite 15), pour obtenir le même résultat que prendre 4 jetons chaque fois qu'il y en a 5 ?* La liste de fractions équivalentes suivante est ainsi produite : $4/5 = 24/30 = 8/10 = 12/15$, favorisant la relation entre les interprétations *partie/tout* et *opérateur*.

Par ailleurs, cette activité permet de confronter la conception selon laquelle plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande. Dans les trois groupes, un conflit cognitif est créé entre les résultats obtenus par la validation et ce qui a été compris en classe. Comme le montre l'extrait suivant (tiré du groupe AS), à l'invitation des élèves (particulièrement E6 dans OR2 et E7 dans AS), l'expérimentatrice s'appuie sur un tout continu pour montrer qu'il ne suffit pas de tenir compte du dénominateur pour comparer des fractions.

Après que la stratégie du double comptage ait été utilisée pour prélever $4/5$ de 30 jetons dessinés et $9/10$ de 30 jetons dessinés, l'expérimentatrice demande aux élèves si prendre $14/15$ de 30 jetons est plus grand ou plus petit que prendre $4/5$ de 30 jetons.

E7 : Moi je dis que c'est plus petit parce que les morceaux vont être plus petits.

E8 : Moi je dis que c'est plus gros.

EXP : Tu dis que c'est lequel le plus gros E8 ?

E8 : 14 sur 15.

E7 : Moi je dis que c'est $4/5$ le plus gros.

E9 : Ben non E7, $9/10$ c'était plus gros que lui, $14/15$ va être encore plus gros.

(L'expérimentatrice, en collaboration avec les élèves, effectue la stratégie du double comptage pour prélever $14/15$ de 30 jetons.)

EXP : Donc $14/15$, c'est encore plus gros que $9/10$ parce qu'avec $9/10$, on prenait 27 jetons sur 30 et avec $14/15$, on en prend 28 sur 30. $14/15$ est équivalent à $28/30$ (elle l'écrit).

E7 : (Surpris) Mais si on le fait avec les pizzas ?

EXP : OK, on va l'essayer avec les pizzas.

(L'expérimentatrice dessine trois cercles et prélève $4/5$, $9/10$ et $14/15$ en expliquant ce qu'elle fait.)

E7 : Mais c'est parce que nous autres en classe, ce qu'on a vu, c'est que si tu le sépares en deux mettons, ben ça fait plus gros que si tu le sépares en plein de petits morceaux.

EXP : C'est vrai que si le dénominateur est plus gros, les morceaux sont plus petits, mais il faut aussi regarder le nombre de morceaux qui sont pris.

Même après le recours au tout continu, E7 n'est pas convaincu. L'expérimentatrice lui demande ce qui est le plus grand entre $1/2$ et $3/4$ et E7 comprend que $3/4$ est plus grand que $1/2$, même si le dénominateur est plus petit. L'expérimentatrice conclut en mentionnant que

pour comparer des fractions, on ne peut pas seulement tenir compte du dénominateur, il faut également tenir compte du numérateur.

- Scénario 2 (OR1 et OR2)

Au scénario 2, chaque élève reçoit le tableau ci-dessous et doit, de façon individuelle, anticiper le plus grand résultat entre A et B. La validation est réalisée en groupe, c'est-à-dire que pour chaque comparaison, les élèves confrontent leur prévision et procèdent ensuite à la validation à l'aide de la calculatrice, en appliquant les deux opérateurs entiers qui composent l'opérateur fractionnaire sur la mesure initiale.

	Qu'est-ce qui est le plus grand ?	Anticipation : A ou B ?	Vérification	
			Résultat A	Résultat B
a)	A : 11/12 de 396 B : 12/11 de 396			
b)	A : 13/3 de 126 B : 17/3 de 126			
c)	A : 3/4 de 620 B : 3/5 de 620			
d)	A : 2/3 de 414 B : 4/6 de 414			
e)	A : 8/5 de 390 B : 8/6 de 390			
f)	A : 11/13 de 195 B : 13/15 de 195			
g)	A : 18/17 de 136 B : 9/8 de 136			

La première comparaison est réussie par trois des six élèves : E4, E5 et E6. L'élève E6 ne justifie pas son choix. Les élèves E4 et E5 font usage de l'interprétation partie/tout pour justifier que $12/11 > 11/12$ et adoptent ainsi la conduite D. La formulation de E4 en témoigne : « Parce qu'ici, tu sépare en 12 pis t'en prends 11, tandis qu'ici, tu sépare en 11 pis ensuite, faudrait que t'en prennes 12, fait que faudrait toute que tu les prennes plus 1. » L'élève E3, engageant elle aussi une interprétation partie/tout, en rencontre cependant les limites : « Mais là, c'est parce que 12 sur 11, ça marche pas ! » L'élève E2, quant à lui, tente d'identifier le résultat des transformations (conduite F), mais rencontre les limites de cette stratégie en raison du choix des nombres. Enfin, l'élève E1 considère les deux fractions comme équivalentes parce qu'elles impliquent les mêmes termes.

À la deuxième comparaison, les six élèves considèrent l'opérateur fractionnaire $17/3$ comme étant plus grand que $13/3$. Quatre de ces élèves ne justifient pas leur choix (E1, E3, E5 et E6). L'élève E2 interprète la fraction comme deux opérateurs entiers en s'appuyant sur les actions à effectuer sur la calculatrice pour la validation. Ainsi, alors qu'à la comparaison précédente, l'élève ressentait le besoin de procéder au calcul pour comparer les résultats qui en découlent, ici, il lui suffit de comparer les opérations engagées par chacun des calculs : « Lui c'est plus grand parce qu'on va multiplier par plus. » Si E4 réfère aux « morceaux » pour justifier que $17/3 > 13/3$, il nous semble, par ailleurs, que sa justification dépasse l'interprétation partie/tout, d'autant plus qu'il s'agit ici de la comparaison de fractions impropres : « Parce que y'a le même dénominateur mais le numérateur est plus grand ici, fait que dans le fond, les morceaux sont de la même grosseur mais ici t'en prends plus. » Il y a à tout le moins la référence à l'interprétation de la fraction en tant que mesure, laquelle permet de penser des fractions impropres à partir de $1/n$.

En c), pour comparer les opérateurs $3/4$ et $3/5$, seul l'élève E1 n'obtient pas un résultat juste qu'il dit avoir donné par « hasard ». L'élève E5 adopte un raisonnement additif en comparant l'écart entre le numérateur et le dénominateur (conduite C), lui permettant par ailleurs d'identifier la plus grande fraction : « Ben c'est parce que ici c'est 4. Pis 3 c'est un de moins que 4. Tandis que l'autre c'est sur 5, pis y'en a 2 de plus. » Il est difficile ici de juger de la validité du raisonnement engagé par E5. Si effectivement la comparaison de l'écart entre numérateur et dénominateur n'est pas une stratégie multiplicative, elle peut aussi témoigner d'une prise en compte du rapport entre le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions. La difficulté des élèves à exprimer verbalement ce rapport fractionnaire ne permet pas ainsi de circonscrire le raisonnement sur lequel reposent les propositions des élèves. Enfin, l'élève E3 adopte quant à elle la conduite D : elle prélève $3/4$ d'un cercle et $3/5$ d'un autre cercle et compare les quantités ainsi obtenues. L'élève E4 s'appuie également sur le sens partie/tout pour interpréter les relations entre le numérateur et le dénominateur, mais sans recourir au dessin : « Les morceaux sont plus gros ici (en pointant $3/4$) pis t'en prends autant dans les deux, fait que $3/4$, c'est plus. » L'élève E2 s'appuie sur le sens opérateur, et l'élève E5, qui répond avec assurance $3/4$, semble adopter la conduite E.

À la quatrième comparaison, trois élèves (E2, E3 et E6) reconnaissent que $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont des fractions équivalentes, ce qu'ils expliquent en s'appuyant sur une règle apprise en classe : on obtient des fractions équivalentes lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre. Les élèves E1 et E4 considèrent $\frac{2}{3}$ comme étant une fraction plus grande parce que le dénominateur est plus petit et, donc, les portions plus grandes. L'élève E4 va cependant un peu plus loin en prenant en compte à la fois le numérateur et le dénominateur, engageant malgré tout un raisonnement additif : « Pis en plus, ici (en pointant $\frac{2}{3}$), y'a rien qu'un chiffre de différence entre les deux pis dans l'autre ($\frac{4}{6}$), y'a deux chiffres de différence. » L'élève E5, quant à elle, choisit la fraction composée des plus grands termes ($\frac{4}{6}$).

Concernant la comparaison entre $\frac{8}{5}$ et $\frac{8}{6}$ de 390, les six élèves anticipent correctement le résultat. Dans le groupe OR1, les élèves se réfèrent au sens opérateur. L'élève E2 répond d'abord que $\frac{8}{6}$ est plus grand que $\frac{8}{5}$ en mentionnant que lorsqu'on divise par 6, on obtient un plus grand résultat. Les élèves E1 et E3 le corrigent en indiquant qu'en divisant par 6, on obtient au contraire un plus petit résultat, ce qui conduit E2 à modifier sa prévision. Cet échange témoigne d'une avancée dans l'appropriation du sens opérateur de la fraction et de l'abandon progressif de l'interprétation partie/tout. Il nous semble intéressant de noter, de plus, que cette avancée se fait au profit de raisonnements numériques et au détriment de la référence au « concret » tel que la grosseur ou le nombre de morceaux exprimés par une fraction. Dans le groupe OR2, E5 dit : « Parce que vu que c'est le même numérateur, ben j'ai pris le plus petit dénominateur », ce qui reçoit l'assentiment des autres élèves. Ainsi, la règle selon laquelle plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande est articulée à une prise en compte du numérateur.

La complexité des deux dernières comparaisons fait chuter la mise en œuvre des conduites E et F. En effet, les fractions à comparer n'ont ni numérateur commun ni dénominateur commun. De plus, il s'agit de fractions très « proches » l'une de l'autre, et ni la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur d'une même fraction ni celle entre les mêmes termes de chacune des fractions, n'est entière.

En f), aucun élève ne reconnaît que $\frac{13}{15}$ est une fraction plus grande que $\frac{11}{13}$. La tâche de comparaison est si contraignante que les élèves se replient sur la comparaison des

dénominateurs. Ainsi, la majorité juge que $11/13$ est plus grande que $13/15$, car d'une part, les parts sont plus grandes pour la fraction $11/13$ que pour la fraction $13/15$ et d'autre part, l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même pour les deux fractions. Par exemple, E6 dit : « C'est que si on le sépare en 15, ça va être des plus petits morceaux. Pis dans les deux, j'ai deux de moins, fait que $11/13$ c'est plus gros. » Alors que les élèves recourent encore à la fraction d'un tout continu conformément à ce qui est fait en classe, l'expérimentatrice rappelle la règle proposée au scénario 1 qui relève de l'interprétation partie/tout collection, soit que $11/13$, c'est prendre 11 jetons chaque fois qu'il y a en 13. Cependant, les élèves interrogent l'expérimentatrice sur l'interprétation partie/tout continu, ce qui la contraint à illustrer sur des tous continus les deux fractions à comparer. La comparaison se fait alors sur la base des résidus⁹¹ : $2/15$ étant plus petit que $2/13$, $13/15$ est plus grand que $11/13$.

(Les élèves vérifient avec leur calculatrice.)

E3 : Hen ?! J'étais sûre que j'avais bon !!!

EXP : Au fait, c'est un peu comme on avait fait quand on avait comparé $4/5$, $9/10$ et $14/15$ de 30 jetons, vous vous souvenez ?

E2 et E3 : Oui.

EXP : Pour obtenir $11/13$ de 195, on peut se dire que chaque fois qu'il y en a 13, on en prend 11; et pour obtenir $13/15$ de 195, on peut se dire que chaque fois qu'il y en a 15, on en prend 13.

E2 : Y'en a toujours 2 qu'on prend pas.

EXP : Exactement, sauf qu'ici (en pointant $11/13$), on en prend 11 et on en laisse 2, et ici on en prend 13 et on en laisse 2.

E3 : OK, fait que $13/15$ c'est plus grand... **Mais moi je comprends quand tu l'expliques comme ça, mais quand je pense aux pizzas, on dirait que ça marche pu.**

(L'expérimentatrice dessine deux rectangles de la même grandeur, sépare l'un d'eux en 13 parties et l'autre, en 15 parties.)

(...)

E3 : Ah ! Je viens de comprendre je pense.

EXP : Oui, qu'est-ce que tu viens de comprendre ?

E3 : Ici tu prends toute ça sauf 2, et ici tu prends toute ça sauf 2, fait que ça fait plus ici (en pointant le rectangle séparé en 15).

EXP : Exactement, $13/15$ c'est plus grand parce que les 2 parties qu'on ne prend pas sont plus petites.

⁹¹ Nous empruntons cette expression à Clarke et Roche (2009).

Lors de la dernière comparaison, les élèves ont beaucoup de mal à comparer les opérateurs fractionnaires $18/17$ et $9/8$. Chacun fait une prévision, mais les élèves se disent incertains et ont de la difficulté à justifier leur choix. Ils semblent ainsi avoir du mal à mettre en œuvre une stratégie qui permette de prendre en compte à la fois le numérateur et le dénominateur. L'hésitation de l'élève E4 montre bien la difficulté éprouvée par les élèves : « Ici (en pointant $9/8$), les parties sont plus grosses sauf qu'ici (en pointant $18/17$), on en prend vraiment beaucoup. » On voit que les élèves ne se contentent plus de comparer les dénominateurs bien qu'ils ne sachent pas encore contrôler la relation numérateur/dénominateur pour effectuer la comparaison.

La difficulté à comparer les fractions conduit l'élève E5 à rechercher une règle à partir du résultat obtenu précédemment ($13/15 > 11/13$). Elle anticipe ainsi que $18/17$ est une fraction plus grande que $9/8$: « Ben moi j'ai mis le A ($18/17$) parce que... la même affaire que tantôt, c'était pas mal la même affaire sauf que tantôt, c'était 2 de plus ou de moins, pis là c'est 1. C'est 18 pis 17, pis ici, c'est 9 pis 8, fait que j'ai pris le plus gros comme tantôt. » Autrement dit, selon cette élève, lorsque l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même, la fraction la plus grande est celle qui comporte les plus grands termes.

Dans le groupe OR1, étant donné les difficultés des élèves, l'expérimentatrice rappelle la règle dictée au scénario 1 : a/b , c'est prendre a jetons chaque fois qu'il y a b jetons. Cependant, cette règle étant construite sur une relation inclusive (a jetons pris sur b jetons), elle ne peut s'appliquer à des fractions impropres. L'expérimentatrice modifiera donc la règle selon le sens rapport (a jetons pour b jetons), présentant ainsi une règle construite sur une relation exclusive. Aucun des élèves ne soulève la différence, et il semble d'ailleurs, comme le montre l'extrait suivant, que cette nouvelle règle va donner accès à E2 à un raisonnement juste articulant le sens rapport et le sens partie/tout.

EXP : Si on réfère aux jetons. Si moi, j'ai 136 jetons, pis que E2, il a les $18/17$ de mes jetons, ça veut dire que chaque fois que j'ai 17 jetons, lui il en a 18. Et s'il a les $9/8$ de mes jetons, ça veut dire que chaque fois que j'ai 8 jetons, lui il en a 9. Est-ce qu'il a plus de jetons s'il a les $18/17$ de mes jetons ou s'il a les $9/8$ de mes jetons ?

E2 : $9/8$.

EXP : Pourquoi ?

E2 : Parce que j'en ai plus souvent un de plus.

Dans le groupe OR2, après la validation à l'aide de la calculatrice, l'expérimentatrice choisit de renforcer la validation en recourant au nombre fractionnaire ($1\frac{1}{8}$ et $1\frac{1}{17}$). Comme le montre l'extrait suivant, cette intervention semble permettre aux élèves E4 et E6 de donner du sens au résultat. Cependant, bien que l'expérimentatrice confirme que $17/17 = 1$ et que $8/8 = 1$, E5 s'interroge sur l'équivalence des deux « 1 » ainsi produits.

EXP : $17/17$, c'est égal à 1. Donc $18/17$, on peut dire que c'est égal à $1\frac{1}{17}$ (elle écrit $18/17 = 1\frac{1}{17}$). Ce sont deux écritures différentes, mais elles représentent le même nombre, elles ont la même valeur. Et $9/8$, est-ce qu'on pourrait l'écrire autrement ?
 E4 : Ben ce serait la même affaire qu'ici mais avec un 8.
 EXP : OK, donc on pourrait écrire ça comment ?
 E4 : Un entier et un huitième.
 EXP : Exactement, $9/8$, c'est la même chose que $1\frac{1}{8}$. Parce que $8/8$, ça fait 1, pis il nous reste $1/8$. Pis c'est plus facile de comparer $1\frac{1}{17}$ et $1\frac{1}{8}$ que de comparer $18/17$ et $9/8$. Qu'est-ce qui est le plus grand, $1\frac{1}{17}$ ou $1\frac{1}{8}$?
 E4 et E6 : $1\frac{1}{8}$.
 E5 : **Mais c'est tu le même 1 ?**
 EXP : Le 1 ici et ici (en pointant l'entier) ?
 E5 : Oui.
 EXP : Oui, $17/17$ est égal à $8/8$ qui est égal à 1 (elle écrit $17/17 = 8/8 = 1$), ce sont des écritures différentes mais elles ont la même valeur, elles représentent le même nombre.

Notons, enfin, qu'au moment de la validation des résultats avec la calculatrice, l'expérimentatrice institutionnalise la relation suivante $a/b \times n = n \div b \times a$ plutôt que la relation suivante $a/b \times n = n \times a \div b$. Commencer en divisant par le dénominateur permet de s'appuyer sur l'interprétation mesure (et partie/tout collection) pour donner du sens aux opérations à effectuer. Ainsi, $n \div b$ permet d'obtenir la valeur associée à $1/b$ et l'opération $\times a$ permet ensuite d'obtenir celle associée à a/b .

En conclusion d'analyse de cette situation, il nous semble utile de préciser que l'interprétation opérateur est enseignée dès le début du scénario et que la procédure technique pour identifier le résultat de la transformation agit, dans les scénarios 1 et 2, comme une procédure de validation. D'autres interprétations sont sollicitées pour traiter les relations, en particulier l'interprétation partie/tout lorsque la fraction est inférieure à 1 et l'interprétation

rapport lorsque la fraction est impropre. Les jetons n'étant pas disponibles au scénario 2, le traitement numérique s'est imposé, mais entraînant une limite importante que nous n'avions pas anticipée : l'opérateur fractionnaire est traité comme une composition de deux opérateurs entiers, et les élèves peuvent donc perdre de vue comment une fraction peut agir comme transformation sur une quantité. La situation choisie n'était sans doute pas la meilleure entrée pour un travail sur la fraction opérateur. La séquence visant le travail sur l'équivalence des fractions, nous avons choisi d'amener les élèves à comparer différents opérateurs fractionnaires qui agissent sur une même quantité. Pour travailler les sens opérateur et rapport de la fraction en articulation avec l'équivalence des fractions, il serait cependant intéressant d'ajouter un troisième scénario visant l'identification d'un opérateur fractionnaire pour agrandir ou rapetisser une mesure initiale. Nous pensons, par exemple, à la situation des voiliers de Blouin (1993) ou encore à celle du puzzle de Brousseau (1998). Ce type de situation marquerait un saut informationnel et générerait sans doute des stratégies plus adaptées, de la part des élèves, à une situation de type « opérateur ». Un moment d'institutionnalisation permettrait de dégager l'équivalence des fractions en liant les interprétations rapport et opérateur : si $n \times a/b = x$, alors $a/b = x/n$, n correspondant à la mesure initiale et x , à la mesure finale.

CHAPITRE VIII

DISCUSSION

Le chapitre VIII vise à apporter des éléments de réponse concernant les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. De nombreuses recherches ont montré la pertinence de situations adidactiques en contexte de classe. Notre recherche conduit à identifier sous quelles conditions de telles situations sont favorables à l'apprentissage en contexte orthopédagogique. L'analyse de nos résultats montre par ailleurs, comme d'autres recherches avant nous (notamment celle de Perrin-Glorian, 1993), le défi que représente la décontextualisation des connaissances. Nous discutons des conditions susceptibles d'amener les élèves à passer d'une connaissance locale à un savoir culturel. Enfin, considérant primordiale la prise en compte des caractéristiques du savoir en jeu, la dernière section de ce chapitre est consacrée aux conditions spécifiques à une intervention portant sur l'équivalence des fractions.

8.1 Conditions portant sur la mise en œuvre de situations à dimension adidactique

Il a été choisi de présenter des situations à dimension adidactique afin de modifier le contrat de dépendance des élèves envers l'orthopédagogue et d'amener ceux-ci à juger de l'efficacité des stratégies mises en œuvre en fonction de la logique interne de la situation. Au regard des résultats obtenus aux chapitres précédents, particulièrement des analyses des situations réalisées au chapitre VII, nous apportons quelques éléments de réponse, mais aussi de réflexion, sur les conditions didactiques favorables à la mise en place de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique. Nous abordons d'abord les caractéristiques du milieu et, ensuite, le pilotage des situations.

8.1.1 Conditions relatives aux caractéristiques du milieu

Dans cette section, nous différencions, dans un premier temps, ce qui favorise la régulation des échanges sur le contenu mathématique en jeu en fonction de l'organisation du travail, soit collectif ou individuel. Nous nous intéressons ensuite aux caractéristiques que doit posséder une rétroaction pour favoriser l'apprentissage autonome des élèves. Est finalement traité le choix des variables didactiques et de leur valeur, qui est un facteur déterminant dans une situation adidactique pour favoriser l'évolution des connaissances des élèves.

8.1.1.1 L'organisation du travail, collectif ou individuel

Sans en faire une condition, nous avons prévu, avant l'expérimentation, d'organiser un milieu qui favorise la rétroaction d'une prévision retenue soit en équipe, soit individuellement. Sur la base de l'analyse de la séquence, nous précisons l'intérêt et les limites de chacune des organisations du travail au regard de l'interaction entre l'action et la rétroaction.

Lorsqu'un travail en équipe exige la production d'une seule réponse, chacun des élèves est appelé à formuler son anticipation au bénéfice de l'équipe. Les interactions entre les élèves conduisent ainsi soit à une décision commune rapide, soit à un échange et à une confrontation des points de vue. Souvent, en effet, des propositions différentes sont formulées par les élèves, chacun engageant des connaissances différentes. L'échange permet de réguler ces perspectives et de synchroniser l'activité mathématique des élèves. Ainsi, même s'il n'y a pas dans notre séquence de situations de formulation et de validation telles qu'entendues par la TSD, le travail collectif favorise des interactions langagières conduisant à l'explicitation et à la validation de connaissances. Notons cependant que dans l'un des groupes (OR2), les échanges entre élèves ont parfois conduit à des tensions. Selon Verba (1999) et Bruyère (2011), deux principes doivent être respectés pour que les échanges mènent à des avancées dans le savoir : le principe de collaboration et le principe de cohérence. Autrement dit, il est nécessaire que les élèves cherchent à être et à agir avec les autres tout en ayant le souci de coordonner leur pensée avec celle d'autrui. Dans le groupe OR2, la tension entre deux élèves

(E4 et E6) transforme parfois la confrontation des idées en confrontation sociale, l'aspect cognitif de l'interaction étant alors relégué au second plan en raison de relations sociales trop conflictuelles (Bruyère, 2011). Au cours de l'expérimentation, la gestion des interactions dans le vif des échanges, par l'expérimentatrice, a permis de recentrer les échanges sur le contenu et ainsi d'éviter que la situation didactique révèle et alimente des conflits personnels. Par exemple, les élèves E4 et E6 ne cherchant pas à coordonner leur pensée, l'expérimentatrice lèvera, ponctuellement, la contrainte de produire une seule réponse. Certaines dynamiques au sein d'un groupe pouvant être défavorables aux dialectiques de formulation et de validation, il semblerait opportun de réfléchir aux caractéristiques du milieu pour assurer des interactions qui portent sur l'enjeu de connaissance plutôt que sur un conflit personnel.

Le travail en individuel ne favorise pas les dialectiques de formulation et de validation, mais a l'avantage de contraindre chaque élève à faire des choix, à mettre en œuvre une stratégie et à bénéficier d'une rétroaction du milieu. Dans le groupe OR1, l'élève E1, le plus faible du groupe, fait peu de propositions en travail collectif et ne se prononce que très peu sur celles des autres; autrement dit, cet élève est « porté » par le groupe. Cependant, lorsque le milieu prévoit une anticipation individuelle, cet élève, parfois avec le soutien de l'expérimentatrice, s'engage et prend le risque de formuler une réponse.

Un autre cas de figure est celui de l'élève E5, du groupe OR2. Bien qu'elle soit plus faible que les deux autres élèves de son groupe, elle participe activement aux échanges avec les autres élèves. Cependant, ses anticipations, souvent erronées, sont généralement rejetées par les autres élèves du groupe. Les arguments des élèves lui permettent, ou non, de saisir les raisons mathématiques pour lesquelles sa proposition est rejetée. Le travail collectif fait donc obstacle, pour E5, à la confrontation de son anticipation avec l'action effective. En effet, le rejet de ses stratégies par les autres membres de l'équipe empêche E5 de faire des essais et, ainsi, d'interagir directement avec le milieu de l'action. Les rétroactions qu'elle reçoit des autres élèves ne sont pas nécessairement interprétables, étant donné les caractéristiques des situations. Le travail individuel permet ainsi à cette élève de profiter d'interactions, avec le milieu, spécifiques à ses stratégies. Enfin, les moments de travail individuel apparaissent particulièrement intéressants pour les élèves les plus faibles au sein d'un groupe.

Par ailleurs, en raison de la proximité physique des élèves, ils ont accès à ce que les autres produisent, ce qui alimente le milieu didactique (Giroux, 2008). En effet, pour mettre en œuvre une stratégie, un élève peut tenter de reproduire les actions effectuées par un autre afin d'en observer le résultat ou, encore, de s'approprier la stratégie de l'autre selon ses propres cadres de pensée. Les résultats montrent qu'imiter les conduites des autres agit bien souvent en tant que relance et favorise ainsi le déblocage chez certains élèves. Contrairement à l'imitation de la conduite de l'expérimentatrice, qui favorise la recherche d'une reproduction exacte de ce qu'elle fait, imiter la conduite d'un autre élève conduit à s'interroger sur la pertinence de la stratégie utilisée et à la modifier si cela est jugé opportun.

8.1.1.2 La rétroaction du milieu

La condition retenue, au moment de la construction des situations, consistait à aménager le milieu de façon à ce qu'il fournisse une rétroaction rapide. L'analyse des interactions lors des situations à dimension adidactique montre que le va-et-vient rapide entre l'action et la rétroaction engage la responsabilité des élèves. Il arrive même que des élèves refusent l'aide de l'expérimentatrice pour réussir seuls le problème. Ainsi, les rétroactions rapides fournies par le milieu semblent modifier le contrat de dépendance qui, comme le relève Mary (2003), caractérise le contexte orthopédagogique. D'ailleurs, un élève (E2), au lieu de rechercher l'aide de l'expérimentatrice, installe un mode d'interaction avec le milieu qui lui permet de « tester » le milieu et de profiter des rétroactions pour ajuster progressivement ses stratégies.

De plus, pour favoriser le fonctionnement autonome des élèves et l'appropriation du savoir, il semble important de prévoir des rétroactions qui permettent non seulement aux élèves de valider leur solution, mais également d'interpréter les informations fournies par le milieu de façon à pouvoir dégager ce qui fonde le résultat (Chevalier, 1992; Salin, 2002; Giroux, 2013). Cette caractéristique n'est pas nouvelle mais est souvent négligée. Elle est pourtant essentielle, car elle permet de relancer les élèves, évitant ainsi à l'orthopédaogogue d'avoir à compenser la faiblesse du milieu. Or, la robustesse d'un milieu n'est pas absolue : elle est relative aux connaissances des élèves. En effet, une même rétroaction peut permettre ou non d'interpréter ce qui fonde un résultat, selon les connaissances mathématiques que les élèves

possèdent. Ainsi, le milieu doit être construit en tenant compte des connaissances des élèves. Toutefois, comme il est impossible de prévoir avec certitude la façon dont les élèves interpréteront les rétroactions du milieu, l'expérimentatrice est appelée, sur le vif, à adapter ses interventions en fonction de leurs conduites.

Les rétroactions des trois premières situations de la séquence permettent aux élèves, dans l'ensemble, d'interpréter ce qui fonde le résultat. Par exemple, les rétroactions fournies lors de la première situation et lors du scénario 2 de la deuxième situation sont particulièrement efficaces pour relancer les élèves qui modifient le tout de référence (conduite A). Lorsque des élèves commettent cette erreur et qu'ils placent, dans le cas de la première situation, les pièces $1/b$ commandées sur la partie c/d à recouvrir ou, dans le cas de la deuxième situation, les bandes $1/b$ bout à bout sous la longueur à obtenir, ils constatent leur échec, la comprennent rapidement et modifient leur conduite sans que l'expérimentatrice n'intervienne. La rétroaction fournie par le milieu pour comprendre ce type d'erreurs apparaît plus efficace pour relancer les élèves que des explications verbales, qui conduisent souvent à des impasses.

Lors de la quatrième situation, au contraire, la rétroaction permet difficilement aux élèves d'interpréter ce qui fonde les résultats. Au scénario 1 de cette situation, les élèves doivent anticiper si on obtient le même nombre de jetons en prenant a/b de n jetons et c/d de n jetons, et la rétroaction est assurée par la manipulation des jetons. Les deux stratégies utilisées pour prélever a/b de n jetons consistent : 1) à prélever a jetons chaque fois qu'il y en a b ; 2) à séparer les n jetons en b groupements égaux et à prélever a de ces groupements. Cette forme de rétroaction, bien qu'elle permette d'identifier le résultat, ne permet pas de conserver la trace de l'effet de chacun des opérateurs, car les élèves déplacent les jetons et les groupements effectués pour parvenir au résultat ne sont donc pas apparents. Pour combler cette lacune, l'expérimentatrice ajoute un scénario dans lequel la rétroaction est effectuée à partir de jetons dessinés. Ce scénario comporte donc un milieu didactique différent du scénario précédent qui se caractérise par son potentiel à soutenir l'interprétation de ce qui fonde, mathématiquement, le résultat. Un milieu impliquant des collections dessinées de jetons permet effectivement de conserver la trace de chacune des actions effectuées : les élèves encerclent les jetons qu'ils regroupent et colorient les jetons prélevés. Ainsi, il est

possible de s'appuyer sur les groupements effectués, apparents sur les collections dessinées, pour interpréter, par exemple, pourquoi $\frac{4}{5}$ de 30 est plus petit que $\frac{9}{10}$ de 30. Au scénario 2 de cette situation, les élèves doivent identifier ce qui est le plus grand entre $\frac{a}{b}$ de n et $\frac{c}{d}$ de n . Ils effectuent ensuite les opérations sur la calculatrice pour vérifier si leur prévision est juste ou non. Cette forme de rétroaction permet difficilement aux élèves d'interpréter les résultats. En effet, ils sont parfois surpris que leur prévision soit inexacte et ne comprennent pas ce qui fonde le résultat. La faiblesse du milieu est alors compensée par les échanges entre les élèves et l'expérimentatrice.

8.1.1.3 Les variables didactiques

Nous traitons, dans cette section, du contrôle de deux variables didactiques classiques, soit les nombres et la disponibilité ou non d'un matériel.

- Les nombres

Conformément à ce que prévoit la TSD, le choix des nombres, dans les premiers scénarios de nos situations, vise à permettre aux élèves de s'approprier la situation (le but à atteindre) à l'aide des connaissances qu'ils maîtrisent. Or, le jeu sur cette variable, prévu pour favoriser l'évolution des stratégies des élèves, n'a pas toujours eu l'effet attendu ni le même effet dans chacun des groupes. Par exemple, à la première situation, le groupe AS, après avoir réussi quelques tâches avec la fraction $\frac{1}{2}$, s'est trouvé totalement démuni lors du changement de fraction. Ainsi, le jeu sur la variable « nombres » a permis de faire échec aux stratégies additives; cependant, il n'a pas agi comme levier pour l'élaboration de stratégies multiplicatives. Les structures multiplicatives étant peu développées chez ces élèves, l'appréhension de la fraction comme structure multiplicative pour résoudre la tâche avec une fraction telle que $\frac{1}{3}$ s'avère beaucoup plus complexe que prévu. Bien que nous sachions par le prétest que les élèves du groupe AS ne connaissaient pas les faits multiplicatifs, nous ne remettons pas en question le choix de la fraction $\frac{1}{3}$. La méconnaissance des faits multiplicatifs complexifie les interventions portant sur l'équivalence des fractions, mais que faire ? Revenir à l'apprentissage des faits multiplicatifs et reporter à plus tard l'apprentissage des fractions ? N'est-ce pas ce qui caractérise trop souvent l'enseignement aux élèves dits en

difficulté, de différer dans le temps l'introduction de nouveaux objets de savoir afin de maîtriser ce qui serait des « préalables » ? L'engagement des élèves dans nos situations et la richesse des interactions à propos du savoir nous convainquent que la séquence a non seulement permis aux élèves de développer leurs connaissances sur la fraction, mais également celles sur les structures multiplicatives. Enfin, même si la progression prévue ne provoque pas nécessairement l'effet escompté, le travail de planification des situations par un jeu de variables numériques est incontournable pour organiser des conditions susceptibles de provoquer l'apprentissage des élèves.

Notons, par ailleurs, que des nombres de moins en moins familiers sont présentés dans le but d'amener les élèves à généraliser leurs connaissances. Or, les contraintes numériques qui visent la généralisation peuvent avoir un effet contraire à celui recherché. Lors du scénario 2 de la quatrième situation, dans lequel les élèves doivent identifier ce qui est le plus grand entre a/b de n et c/d de n , nous avons choisi de présenter des fractions qui permettent difficilement de mettre en œuvre une stratégie multiplicative. Par exemple, pour comparer $13/15$ de 195 et $11/13$ de 195, différentes stratégies multiplicatives sont possibles : 1) comparer la relation multiplicative entre 13 et 11 et celle entre 15 et 13; 2) comparer la relation multiplicative entre 13 et 15 et celle entre 11 et 13; 3) juger ce qui est le plus grand entre $195 \div 15 \times 13$ et $195 \div 13 \times 11$. Or, les fractions à comparer rendent ces stratégies si complexes à contrôler que les élèves se replient sur des stratégies non valides qu'ils avaient pourtant rejetées précédemment. Enfin, s'il y a un équilibre à rechercher entre les contraintes numériques et les connaissances visées, il n'en demeure pas moins que cette tâche a conduit les élèves à confronter leur anticipation avec la rétroaction de la calculette et, ainsi, à remettre en cause leur conception selon laquelle plus un dénominateur est petit, plus la fraction est grande.

- Le recours à du matériel

La gestion de la variable « matériel » est délicate, car si le matériel joue un rôle important dans la construction d'une situation de référence, sa présence peut également nuire à la mise en œuvre de stratégies faisant appel au savoir visé. L'analyse des résultats nous invite à préciser les différents rôles qu'a joués le matériel en tant qu'élément du milieu didactique dans la séquence expérimentée.

Comme prévu, le recours à la manipulation de matériel a permis aux élèves, au début d'une situation, de saisir le but à atteindre. Cependant, nous n'avions pas prévu que le matériel pouvait annuler en quelque sorte l'effet du jeu de certaines variables qui, selon l'analyse *a priori*, devaient contraindre les élèves à engager des stratégies faisant appel à la connaissance visée. À titre d'exemple, aux premiers scénarios de la première situation, les élèves ont accès à une figure pour anticiper le nombre de pièces de $1/b$ nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure. La présence de la figure favorise le recours à la partition mentale, et ce, même lorsque les valeurs d'autres variables, en l'occurrence le choix des nombres et de la figure, rendent cette stratégie inefficace. Cela dit, la manipulation de la variable didactique « matériel » doit prendre en compte comment la présence de celui-ci interagit avec les autres variables de la situation.

Le matériel agit à titre de référence. Ainsi, lorsque les élèves ont saisi l'enjeu de la tâche et ont construit, à l'aide du matériel, une situation de référence, le retrait de ce dernier pour favoriser l'élaboration de stratégies numériques a l'effet escompté. Autrement dit, même en son absence, le matériel continue à agir à titre de référence, car c'est en évoquant la situation pour laquelle le matériel est un support puissant à la représentation que les élèves recourent à du numérique. Par exemple, lors de la troisième situation sur les rapports, l'élève E4 dégage une stratégie numérique contrôlée pour construire un rapport équivalent à 2 trombones pour 3 boutons verts partant de 20 trombones de la manière suivante : a) on obtient le nombre de groupements de 2 trombones dans 20 trombones en divisant 20 par 2 ($20 \div 2 = 10$); b) il doit y avoir autant de groupements de 2 trombones que de groupements de 3 boutons verts, il faut donc 10 groupements de 3 boutons verts ($10 \times 3 = 30$). Si le matériel est d'abord nécessaire pour valider les prévisions, les connaissances des élèves permettent éventuellement de faire fi du matériel.

Il paraît important de préciser que le matériel est ici considéré comme un support à la représentation en raison des connaissances que possèdent les élèves. En effet, des élèves qui ont certaines connaissances sur les structures multiplicatives et les fractions n'ont pas besoin de ce support « concret », car leurs connaissances numériques fonctionnent comme du « concret ». Cependant, l'absence de ces connaissances requiert un milieu qui fait appel au matériel pour permettre, dans un premier temps, de mettre en œuvre une stratégie et, ensuite,

d'interpréter les rétroactions. Soulignons également que l'effet du matériel diffère d'une situation à l'autre et doit donc être analysé en tenant compte des caractéristiques de la situation dans laquelle il s'inscrit.

8.1.2 Conditions portant sur le pilotage de situations à dimension adidactique

Le pilotage de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique est une question complexe, car les contraintes associées à ce contexte ne facilitent pas le fonctionnement autonome des élèves. En effet, l'orthopédagogue travaille avec un nombre restreint d'élèves dits en difficulté, et le service orthopédagogique se caractérise par un contrat explicite d'aide à l'élève. Ainsi, l'orthopédagogue se trouve en plein conflit s'il vise la dévolution et l'apprentissage par adaptation, conflit que Brousseau (2002) décrit comme le paradoxe de la dévolution des situations :

Le professeur, à la fois désire que les élèves donnent les réponses qu'il leur enseigne parce que c'est son métier, mais en même temps que les élèves donnent cette réponse par eux-mêmes, en raison de l'adéquation de la réponse à la question et non pas parce que c'est le désir ou la connaissance du maître. (p. 102)

Étant donné la proximité physique de l'orthopédagogue avec les élèves qu'il reçoit, il semble particulièrement intéressant de s'interroger sur la fonction de l'orthopédagogue lors de situations à dimension adidactique. Est-il préférable qu'il soit le plus discret possible ou qu'il participe aux échanges des élèves ? Notre recherche apporte des éléments de réponse à cette question en montrant comment la présence de l'orthopédagogue peut soutenir l'interaction entre le milieu adidactique et les élèves. Dans cette section, nous montrons l'intérêt d'un pilotage des situations relativement souple de façon à : 1) modifier le milieu si la situation ne favorise pas la mise en œuvre de la stratégie faisant appel à la connaissance visée par l'enseignement; 2) soutenir les élèves dans la mise en œuvre mais aussi dans la formulation et la validation de stratégies; 3) prendre en compte les objets de savoir investis par les élèves non prévus par l'analyse *a priori*.

8.1.2.1 Modification du milieu

Aucune séquence, aussi bien ficelée soit-elle, ne peut garantir l'accès aux stratégies visées par tous les élèves. Ainsi, le déroulement de notre séquence a varié en fonction des groupes, particulièrement entre les groupes OR (issus de deux classes étroitement liées par les contenus d'enseignement) et le groupe AS. À plusieurs reprises, la séquence prévue a été modifiée pour prendre en compte et en charge les interactions entre les élèves et le milieu. L'adaptation n'est pas essentiellement réalisée en fonction des « connaissances préalables » des élèves ou de leurs « besoins », mais surtout en fonction des interactions des élèves avec le milieu (lequel comporte aussi les autres élèves). Nous pourrions modéliser les rapports de l'expérimentatrice avec son propre milieu, qui est celui des interactions élèves/milieu, un peu à l'image de celui du rapport élève/milieu. Alors que l'élève est appelé à adapter ses stratégies aux nouvelles contraintes de la situation, l'expérimentatrice est quant à elle appelée à adapter ses stratégies d'enseignement aux contraintes non prévues de la situation. En effet, si le milieu avec lequel interagit l'expérimentatrice ne se comporte pas comme prévu, il lui impose une contrainte à laquelle elle répond par une adaptation de ses propres stratégies d'enseignement pour voir évoluer les interactions élèves/milieu en fonction de l'intention didactique qu'elle poursuit. Enfin, s'il est parfois pertinent de prendre en compte les objets de savoir investis par les élèves non prévus par l'analyse *a priori* (voir section 8.1.2.3), nos résultats montrent qu'il arrive également que des modifications du milieu soient nécessaires pour favoriser l'apprentissage du savoir mathématique visé.

Pour illustrer nos propos, nous présentons ici deux exemples dans lesquels l'expérimentatrice modifie le milieu pour que les interactions entre les élèves et le milieu favorisent la mise en œuvre de stratégies faisant appel à la connaissance visée par l'enseignement. Lors de la deuxième situation, malgré la rétroaction du milieu et le soutien apporté par l'expérimentatrice, les élèves du groupe AS progressent peu. En effet, pour formuler un message permettant à l'expérimentatrice de tracer un segment de la même longueur que le leur, les élèves persistent à décrire les actions de pliage et de reports à effectuer et ne recourent pas aux fractions. L'expérimentatrice choisit donc de modifier la tâche : ce sont désormais les élèves qui doivent tracer un segment à partir d'un message qu'elle formule. Ce

renversement obligera les élèves à traiter les fractions et favorisera ainsi l'appropriation de la fraction en tant que mesure.

L'expérimentatrice modifie également le milieu lors de la quatrième situation, cette fois en raison d'une conduite, non prévue par l'analyse *a priori*, permettant aux élèves de faire une prévision juste sans engager la connaissance visée. Pour identifier si en prenant a/b de n jetons, on obtient la même quantité de jetons qu'en prenant c/d de n jetons, les élèves cherchent le résultat de chacune des transformations pour les comparer. Pour contrer cette stratégie, une comparaison dans laquelle la valeur de n n'est pas donnée est ajoutée; les élèves doivent indiquer s'ils obtiennent plus de jetons en prenant $4/5$, $9/10$ ou $14/15$ d'une collection de jetons. Bien que l'analyse *a priori* aurait pu prévoir cette conduite, il n'en demeure pas moins qu'une analyse *a priori* est certainement toujours perfectible et ne peut donc prévoir toutes les conduites. De plus, l'élaboration d'une situation idéale paraît impossible, car, comme nous l'avons mentionné précédemment, un même milieu peut s'avérer plus ou moins favorable à l'apprentissage en fonction des connaissances des élèves. Le contexte orthopédagogique permet ainsi de pallier les imperfections du milieu en le modifiant, sur le vif, selon les interactions élèves/milieu.

8.1.2.2 Soutien de l'orthopédagogue dans la mise en œuvre d'une stratégie finalisée ainsi que dans la formulation et la validation de stratégies

Considérant que le fonctionnement autonome des élèves est un idéal qui peut être difficile à atteindre, nous avons retenu la possibilité de soutenir les élèves dans la mise en œuvre d'une stratégie finalisée (Giroux, 2013). La recherche conduit de plus à considérer comme favorable à l'apprentissage un soutien portant sur la formulation et la validation de stratégies. Elle oblige également à examiner le soutien de l'orthopédagogue dans les cas où un élève rencontre une véritable impasse et n'arrive à produire aucune anticipation.

- Soutien dans la mise en œuvre d'une stratégie finalisée

Notre recherche montre l'importance, comme le soulève Giroux (2013), de soutenir la mise en œuvre d'une stratégie justifiée par la logique de la situation. Il arrive en effet que les élèves aient, pour différentes raisons, du mal à compléter une démarche même si la stratégie qu'elle suppose est adéquate. Le soutien de l'orthopédagogue est alors nécessaire pour permettre à l'élève d'obtenir une rétroaction du milieu. Pour montrer l'importance de cette condition, nous présentons deux épisodes où, en l'absence de ce type de soutien, les élèves n'ont pu recevoir de rétroaction du milieu sur la stratégie engagée. Au scénario 1 de la deuxième situation, les élèves du groupe AS, pour formuler un message indiquant la mesure d'un segment ($2 \frac{1}{2}$ bandes) à partir d'une bande-unité, plient la bande-unité en deux et reportent la demi-bande sur le segment. Or, en raison d'un manque de précision, ce report n'épuise pas le segment. Comme l'expérimentatrice n'intervient pas, les élèves interprètent alors cette stratégie comme inadéquate. Le second exemple porte sur une stratégie qu'un élève n'a pas été en mesure de finaliser. Lors de la quatrième situation, pour identifier les $\frac{4}{7}$ d'une collection de 21 jetons, l'élève E7 verbalise son raisonnement ainsi : « 3 fois 7, ça donne 21, fait que c'est 3 », identifiant ainsi le $\frac{1}{7}$ de 21. Au lieu d'aider l'élève à finaliser sa stratégie, en expliquant que 3 correspond à la valeur de $\frac{1}{7}$ et qu'il faut multiplier par 4 pour identifier la valeur de $\frac{4}{7}$, l'expérimentatrice, dans le feu de l'action, choisit d'enseigner la stratégie du double comptage. Ainsi, alors que l'élève E7 tente de mettre en œuvre une stratégie numérique, elle le ramène à une stratégie plus élémentaire.

- Soutien dans la formulation et la validation de stratégies

La contrainte de produire une réponse commune favorise les dialectiques de formulation et de validation. Cependant, une stratégie efficace peut être engagée, mais difficilement formulable par les élèves. Le soutien de l'expérimentatrice consiste alors à reformuler la stratégie efficace, autrement dit, à rendre explicite le modèle implicite mis en œuvre par l'élève. Ce type d'intervention est très fréquent tout au long de la séquence. L'extrait de verbatim qui suit illustre ce phénomène. L'élève E6, au moment de la validation, tente d'expliquer à E5 une règle d'action permettant d'identifier le nombre de pièces de $\frac{1}{b}$ nécessaire pour recouvrir $\frac{1}{3}$. En raison des difficultés éprouvées par E6, l'expérimentatrice

reformule ses propos, ce qui, en plus de favoriser la compréhension de E5, semble amener E6 à avoir plus de contrôle sur la stratégie qu'elle a elle-même utilisée.

E6 :	Moi j'ai un truc. Disons que c'est divisé par $\frac{1}{3}$ là, ben t'as juste à faire $\frac{1}{6}$ divisé par 3 pis tu sais que ça te prend 2 sixièmes.
E5 :	Hen ?
E6 :	Ben, j'me comprends.
EXP :	Ce qu'elle a remarqué E6, c'est que pour identifier le nombre de pièces nécessaire pour recouvrir $\frac{1}{3}$, on peut prendre le dénominateur, 6 (en pointant $\frac{1}{6}$), et le diviser par 3; 6 divisé par 3, ça fait 2, donc ça prend 2 pièces de $\frac{1}{6}$ pour recouvrir $\frac{1}{3}$.
E6 :	Dans le fond, c'est toujours le dénominateur divisé par 3 parce que c'est pour $\frac{1}{3}$.
E5 :	Ah OK ! C'est pas mal plus simple quand tu le dis de même !

Précisons qu'il ne s'agit pas d'interroger l'élève pour qu'il prenne conscience de l'inexactitude de ce qu'il a formulé, ce qui pourrait conduire à des confusions dans l'échange et ralentir l'avancée du temps didactique. Lorsqu'un élève met en œuvre une stratégie correcte, mais que la formulation est incorrecte ou incomplète, l'expérimentatrice reformule la stratégie de manière à maintenir l'activité mathématique des élèves. Une telle intervention compense, d'une certaine manière, l'absence d'une véritable situation de formulation dont le milieu permet de valider ou d'invalidier les formulations. La rétroaction est cependant beaucoup plus rapide qu'en situation de formulation, ce qui répond d'ailleurs à une de nos conditions didactiques. La formulation de la stratégie correcte effectuée par l'expérimentatrice permet effectivement une reconnaissance rapide de la justesse des connaissances implicites; elle participe ainsi à la rétention d'une stratégie efficace. Notons toutefois que cette formulation repose sur la façon dont l'expérimentatrice interprète les actions de l'élève; il peut, par conséquent, y avoir un écart entre la stratégie adoptée par l'élève et celle formulée par l'expérimentatrice.

Par ailleurs, le soutien de l'expérimentatrice est parfois utile au moment de la validation d'une stratégie. Lorsqu'un élève adopte une stratégie correcte mais qu'il éprouve des difficultés à convaincre les autres élèves, l'expérimentatrice l'accompagne. C'est le cas, notamment, lors de la troisième situation où l'expérimentatrice accompagne l'élève E9 pour amener les élèves E7 et E8 à rejeter une stratégie additive au profit d'une stratégie

multiplicative afin d'identifier la mesure manquante d'un bonhomme (l'extrait de verbatim de cet échange est présenté à la page 220).

Enfin, en plus de soutenir les élèves lorsqu'ils rencontrent des difficultés, l'expérimentatrice participe aux échanges de manière à favoriser la formulation et la validation de stratégies. Si le contexte orthopédagogique génère ce type d'interactions, celui-ci est aussi causé, selon nous, par la nature des rétroactions de nos situations. Dans la plupart des situations que nous avons expérimentées, les rétroactions fournissent le résultat; elles ne se limitent donc pas à rétroagir sur la justesse de la stratégie engagée comme prévu dans la TSD. Ainsi, pour que la rétroaction de la situation ait un effet optimal sur l'adaptation des connaissances des élèves, l'expérimentatrice stimule les échanges entre les élèves à propos de leurs décisions avant même que celles-ci soient mises à l'épreuve par le milieu. En effet, l'expérimentatrice invite régulièrement les élèves à expliquer aux autres leur stratégie ou à se prononcer sur la justesse d'une stratégie proposée par un élève. Le but de ces interventions est de soutenir la relation entre les élèves et le milieu. L'analyse des résultats suggère que les interventions de l'expérimentatrice stimulent l'activité mathématique des élèves et leur autonomie intellectuelle, dans une forme cependant différente de celle prévue par la TSD.

- Soutien lors d'une impasse

Lorsqu'un élève est incapable de faire une anticipation, les principales interventions de l'expérimentatrice consistent à modifier les nombres (souvent en s'appuyant sur $1/b$ ou sur 1), ou encore à favoriser l'identification de régularités numériques en s'appuyant sur les résultats précédents. Ce type d'intervention favorise parfois l'activité mathématique des élèves. En effet, si les élèves interprètent les éléments du milieu en cherchant simultanément à répondre à l'intention didactique, ils interprètent également le soutien de l'expérimentatrice en cherchant à la fois à répondre aux exigences de la situation en fonction des connaissances qu'ils possèdent. Cependant, il arrive également que les interventions de l'expérimentatrice génèrent des pilotages serrés jusqu'à l'obtention d'une prévision juste. Nos résultats montrent qu'il peut parfois être difficile de soutenir les élèves pour qu'ils anticipent ou engagent une

stratégie sans créer d'effet Topaze⁹². Ceci nous conduit à remettre en question la nécessité de faire une anticipation. Si la situation le permet, l'élève pourrait plutôt être invité à observer le résultat. Par exemple, lors de la première situation, les pièces pourraient être remises à l'élève de façon à ce qu'il superpose le nombre de pièces de $1/b$ nécessaire pour recouvrir c/d de la figure. Si la situation ne permet pas ce type d'intervention, comme c'est le cas lors du scénario 1 de la deuxième situation dans lequel les élèves doivent formuler un message pour exprimer une longueur de segment, l'élève pourrait alors être invité, simplement, à faire un essai numérique. Autrement dit, l'idée est d'amener les élèves à recevoir une rétroaction du milieu et à l'interpréter pour que leurs actions soient gérées en fonction de la logique interne de la situation.

Enfin, si les prévisions effectuées en individuel ont conduit à quelques reprises à des pilotages serrés, les prévisions réalisées en groupe de trois élèves, en revanche, semblent efficaces pour éviter de telles impasses. En effet, lors de prévisions effectuées en équipe, il y a toujours au moins un élève qui met en œuvre une stratégie, ce qui stimule ensuite les interactions entre élèves à propos du savoir. Ainsi, le travail réalisé en équipe semble favorable à l'apprentissage par adaptation au milieu.

8.1.2.3 Prise en compte d'objets de savoir non prévus, investis par les élèves

Comme le mentionne Giroux (2013), tenir compte d'un objet de savoir non prévu mais investi par les élèves permet la coordination de connaissances et le maintien de l'engagement des élèves. Dans notre séquence, il arrive que les élèves mettent en œuvre des stratégies non anticipées par l'analyse *a priori* dans lesquelles des savoirs non prévus sont investis. Par exemple, à la deuxième situation, un élève privilégie une écriture décimale plutôt que fractionnaire pour identifier la mesure d'un segment. Ainsi, la relation entre l'écriture

⁹² L'effet Topaze est un concept didactique défini par Brousseau en référence à la pièce de Marcel Pagnol où le maître dicte aux élèves, par exemple, « des moutonsse ». Le maître transforme la tâche : pour réussir, il n'est plus nécessaire pour les élèves de connaître le pluriel mais d'écrire les sons qu'ils entendent. Autrement dit, il y a effet Topaze quand, pour parvenir à la production d'une réponse conforme, le maître réunit des conditions qui permettent d'obtenir la réponse attendue sans que les élèves n'aient à investir le moindre sens. La réussite est ainsi obtenue sans qu'il y ait appropriation du savoir.

fractionnaire $2\frac{1}{2}$ et l'écriture décimale 2,5 est établie. Il arrive également, dans la séquence, que la mise en œuvre d'une stratégie prévue provoque des difficultés imprévues, engendrant alors l'investissement de connaissances non visées par l'enseignement. C'est le cas lors de la première situation, où les difficultés des élèves du groupe AS concernant la partition d'un cercle en six parties égales engendrent une interaction dont le contenu est essentiellement de nature géométrique. Bien que dans cet exemple, les connaissances investies par les élèves ne soient pas directement liées à la connaissance visée, les élèves recherchent activement la façon de partitionner le cercle en parties égales pour solutionner le problème présenté. Il semble alors pertinent de faire preuve d'*opportunisme didactique* en saisissant les occasions qu'apporte la situation (Giroux, 2013).

Il ne s'agit toutefois pas de prendre en compte chaque difficulté que rencontrent les élèves. Par exemple, au cours de la séquence, des difficultés concernant le passage des codes oraux aux codes écrits des fractions sont observées. L'expérimentatrice n'interrompt pas la situation pour procéder à un enseignement sur cet objet de savoir, ce qui distrairait les élèves du but poursuivi et qui, de plus, éloignerait du savoir visé. Traiter chaque difficulté identifiée conduirait, comme le relèvent Cange et Favre (2003), à détourner l'enseignement de son objet initial, entraînant ainsi l'intervenant et les élèves dans une forme de spirale : une erreur d'élève conduit l'enseignant à une activité non prévue, qui donne à son tour naissance à une erreur non prévue, qui génère une nouvelle activité, etc.

8.2 Conditions relatives à la décontextualisation des connaissances

Dans notre recherche, les élèves n'utilisent pas d'emblée les connaissances reconnues utiles dans une situation lors d'une nouvelle situation et lors des moments de décontextualisation. Les connaissances développées dans les situations à dimension adidactique auraient ainsi un caractère local. La difficulté à passer d'une connaissance locale à un savoir culturel ne semble pas relever des contraintes propres au contexte orthopédagogique. Comme le soulève Brousseau (1988), « Si la phase de personnalisation a bien marché, quand l'élève a répondu aux situations proposées, il ne sait pas qu'il a « produit » une connaissance qu'il va pouvoir utiliser dans d'autres occasions » (p. 14). La difficulté à se détacher de la situation d'action

reposerait donc sur les caractéristiques du dispositif. Selon Perrin-Glorian (1993), cette difficulté serait cependant particulièrement importante chez les élèves « faibles ». La chercheuse explique notamment ce phénomène par le fait que les élèves « ordinaires », contrairement aux élèves « faibles », auraient un projet de décontextualisation au moment même où ils travaillent sur la situation d'action. Le fait d'avoir le projet d'acquérir des connaissances les conduirait à rechercher, parmi les *artifices didactiques* (Brousseau, 1998), les éléments qui ont un caractère universel et qui pourront être réutilisés dans d'autres occasions. Dans cette perspective, réfléchir à l'intention didactique poursuivi ne serait pas nuisible à l'apprentissage, mais pourrait au contraire participer à la décontextualisation des connaissances.

Enfin, la difficulté particulièrement importante chez les élèves « faibles » à se détacher de la situation d'action pourrait être étudiée selon un cadre psychologique, ce qui conduirait à s'intéresser aux spécificités cognitives des élèves « faibles ». Elle pourrait aussi être étudiée selon un cadre anthropo-didactique, ce qui conduirait par exemple à analyser la sensibilité au contrat didactique selon les pratiques d'éducation familiale (Sarrazy, 2007). Or, la posture épistémologique que nous adoptons et l'objectif de notre recherche nous conduisent plutôt à nous interroger sur les caractéristiques que devrait posséder un dispositif d'enseignement pour faciliter la décontextualisation des connaissances. Ainsi, nous discutons, dans cette section, de trois conditions didactiques qui apparaissent favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques : 1) la présentation de situations variées; 2) la présentation de moments de décontextualisation tout au long de la séquence; 3) l'utilisation d'un langage précis centré sur le savoir en jeu.

8.2.1 *Présentation de situations variées*

Considérant la nécessité d'élargir le caractère d'utilité des savoirs, nous avons retenu comme condition didactique l'importance de présenter des situations variées. Dans le cadre de l'intervention orthopédagogique sur la notion de fractions équivalentes, cette condition permet, en particulier, de confronter les élèves à des situations dans lesquelles l'équivalence n'est pas considérée strictement du point de vue de l'égalité de parties prises sur un tout

continu. Le choix de nos situations, convoquant différentes interprétations de la fraction, et de leurs contraintes conduit à dépasser cette conception en favorisant, de plus, l'appropriation de la structure multiplicative des fractions. L'équivalence des fractions est ainsi interprétée sous des perspectives différentes, ce qui génère l'élaboration de stratégies qui varient selon les caractéristiques des situations. Aussi, l'ordonnancement des situations au sein de la séquence participe à l'élargissement du caractère d'utilité du savoir par les relances qu'il favorise sur la notion de fractions équivalentes d'une situation à l'autre. De plus, un assortiment de tâches liées à l'équivalence des fractions est intégré aux différentes situations : compléter des fractions équivalentes (rechercher le numérateur ou le dénominateur), trouver de nouvelles fractions équivalentes (ni le numérateur ni le dénominateur n'est imposé), juger de l'équivalence de deux fractions, et comparer (ou ordonner) des fractions. Notons que cette dernière tâche exige non seulement d'identifier si les fractions sont équivalentes, mais également, si ce n'est pas le cas, de les comparer.

Nos résultats tendent à montrer l'importance de varier les situations qui sollicitent l'équivalence des fractions. Par exemple, dans la première situation, les élèves doivent identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure, et dans la deuxième situation, ils doivent identifier le nombre de bandes de $1/b$ nécessaire pour obtenir c/d bande(s). Ces situations se distinguent par leur contexte et par les valeurs attribuées aux nombres : 1) la première situation implique des figures et la seconde, des bandes; 2) $c/d \leq 1$ dans la première situation, alors que dans la seconde, c/d est parfois plus grand que 1. Si le changement de contexte peut sembler superficiel, il est toutefois fortement contraignant pour les élèves du groupe AS. En effet, alors que les relations $b \times 1/b = 1$ et $(b \div 2) \times 1/b = 1/2$ ont été travaillées lors de la première situation, ces élèves n'investissent pas d'emblée ces relations multiplicatives dans le nouveau contexte. Dans les groupes OR, le changement concernant les valeurs numériques apparaît contraignant. Ainsi, bien que la relation $a \times 1/b = a/b$ soit maîtrisée par la majorité des élèves lors de la première situation, des difficultés sont observées lors de la deuxième situation lorsque $a/b > 1$.

Nos résultats conduisent cependant à constater une limite de notre séquence à propos de la condition relative à la variété des situations. Si l'enchaînement des différentes situations a

favorisé une présentation variée des contextes d'utilisation de la fraction équivalente, leur articulation pourrait être plus réfléchie. En effet, les résultats suggèrent qu'il ne suffit pas de présenter successivement des situations qui impliquent des usages différents de la fraction équivalente pour que les élèves articulent ces différentes interprétations et construisent ainsi la notion de fractions équivalentes. Or, comme nous le verrons à la section 8.3.1 (p. 278-284), l'équivalence de deux fractions prend un sens bien différent selon l'interprétation de la fraction sollicitée, ce qui explique également les difficultés des élèves à établir, par le biais du savoir, des relations entre les différentes situations.

8.2.2 Présentation de moments de décontextualisation tout au long de la séquence

Nous avons choisi de procéder, tout au long de la séquence, à une articulation entre les moments d'adidacticité et les moments de décontextualisation. Les difficultés des élèves à se détacher de la situation d'action montrent la pertinence de prévoir des moments de décontextualisation fréquents. Les moments de décontextualisation comportent différents types d'activités : des exercices s'inscrivant dans un contexte intramathématique, des énoncés de problème impliquant un contexte différent de celui présenté dans la situation d'action et des moments d'institutionnalisation dans lesquels sont exposées des écritures mathématiques associées à la situation d'action.

- Exercices et énoncés de problème

Contrairement aux situations à dimension adidactique, les exercices et les énoncés de problème n'offrent pas de rétroaction aux élèves. En cas de difficulté, l'expérimentatrice est alors contrainte d'intervenir, ce qui génère parfois des pilotages serrés. L'aide apportée dans les énoncés de problème présentés à la deuxième et à la troisième situation conduit d'ailleurs soit à un morcellement de la tâche, soit à la présentation d'une stratégie. Lors d'exercices sans rétroaction, l'enseignant d'une classe ordinaire peut compter sur la production de la solution attendue par au moins un élève du groupe afin de faire progresser la leçon. En contexte orthopédagogique, en raison du nombre restreint d'élèves, le risque qu'aucun élève

ne produise la solution attendue est plus grand, créant alors un lien de dépendance à l'égard de l'orthopédagogue.

Cependant, comme les exercices et les énoncés de problème ressemblent davantage à ce qui est fait en classe que les situations à dimension adidactique, il semble nécessaire d'en présenter pour aider les élèves à établir la relation entre ce qui est réalisé en contexte orthopédagogique et ce qui l'est en classe. D'ailleurs, les résultats montrent que lors des activités conventionnelles, les connaissances acquises en classe ressurgissent davantage que celles développées dans les moments d'adidacticité. Par exemple, dans un moment de décontextualisation impliquant la comparaison de fractions, plusieurs élèves considèrent $6/2$ comme étant plus grand que $15/5$. Ce choix repose sur une conception dégagée en classe qui sera d'ailleurs observée tout au long de la séquence, soit de considérer que plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande, et ce, sans tenir compte du numérateur. L'expérimentatrice recourt à la situation de référence, en l'occurrence aux bandes, pour montrer que $6/2$ et $15/5$ sont des fractions équivalentes, en traçant un segment mesurant $6/2$ bandes et un autre, $15/5$ bandes. Ce type d'intervention peut sembler paradoxal puisque les moments de décontextualisation visent justement à se détacher de la situation d'action. Cependant, ils sont au contraire fort précieux, car ils permettent de confronter des connaissances développées en contexte de classe qui fonctionnent localement, à celles utilisées en contexte orthopédagogique qui ont aussi, pour les élèves, un caractère local.

L'analyse des résultats montre par ailleurs que les sauts importants entre les situations d'action et les moments de décontextualisation ne facilitent pas l'établissement de relations entre chacun des types d'activités. Limiter de tels écarts en présentant des exercices et/ou des énoncés de problème qui reposent exactement sur le même contenu que celui traité dans la situation d'action favoriserait sans doute une utilisation autonome des connaissances acquises en situation d'action lors des moments de décontextualisation. Par exemple, dans les énoncés de problème présentés au terme de la troisième situation (problèmes des pizzas et de la peinture), au lieu d'amener les élèves à comparer des rapports, il serait possible de maintenir la complétion de rapport, comme c'était le cas dans la situation d'action. Notons cependant que présenter des exercices et/ou des énoncés de problème dont le contenu dépasse celui traité dans la situation d'action favorise la coordination de connaissances. Par exemple, dans

la première situation, après que les élèves aient complété l'énoncé suivant, *J'ai besoin de 2 pièces correspondant à ____ du rectangle pour recouvrir $1/3$ de ce rectangle*, des questions faisant appel aux relations scalaires sont présentées telles que *Qu'est-ce qui est 2 fois plus petit que $1/3$?* Cet exercice conduit les élèves à établir l'équivalence entre « ce qui entre 2 fois dans c/d », « ce qui est 2 fois plus petit que c/d » et également, dans un groupe (OR1), « $c/d \div 2$ ». Enfin, bien qu'il puisse être intéressant, dans les moments de décontextualisation, de dépasser ce qui a été présenté dans les situations d'action, la gestion didactique de l'écart reste très délicate.

- L'écriture mathématique

Une place importante est accordée à l'écriture mathématique tout au long de la séquence. Contrairement aux exercices et aux énoncés de problème qui sont présentés en alternance avec les situations à dimension adidactique, l'écriture mathématique est également utilisée à l'intérieur même des moments d'adidacticité. Différentes formes d'écritures sont présentées : un tableau dans lequel les données numériques sont compilées, l'écriture d'égalités représentant la situation d'action (ex. : $a \times 1/b = a/b$), l'écriture d'une liste de fractions équivalentes.

L'écriture permet d'identifier, dans les situations d'action, les éléments importants à l'égard du savoir mathématique visé. Ainsi, les échanges à l'oral s'appuient sur la situation d'action pour donner du sens aux relations numériques, qui elles, sont écrites. Dans la séquence, des listes de fractions équivalentes sont produites dans différentes situations, prenant alors des sens différents et également plusieurs fois dans une même situation à partir de nombres différents. La liste $a/b = c/d = (\dots)$ est associée, à la première situation, à a pièces de $1/b$ d'une figure qui recouvrent la même surface que c pièces de $1/d$ de la figure et, à la deuxième situation, à a bandes de $1/b$ qui, placées bout à bout, produisent la même longueur que c bandes de $1/d$. À la troisième situation, la liste de fractions équivalentes est associée à une liste de rapports équivalents : a trombones pour b boutons est équivalent à c trombones pour d boutons. La même écriture est donc reprise à partir de différents nombres et de différents

contextes, pouvant conduire les élèves à des « niveaux d'abstraction de plus en plus élaborés », expression empruntée à Barallobres (2015).

Les écritures mathématiques, bien souvent, sont présentées de façon à favoriser l'identification de régularités. Nos résultats, tout comme ceux de Giroux (2013), montrent que les élèves sont très sensibles aux régularités. Par exemple, lors de production de listes de fractions équivalentes, les élèves prennent plaisir à ajouter de nouvelles fractions en choisissant des termes de plus en plus grands. À plus d'une reprise, et dans les trois groupes, lorsque l'expérimentatrice les arrête pour passer à une autre activité, les élèves rétorquent qu'ils pourraient en trouver encore plein d'autres ! Le fait de dégager des régularités permet d'exercer un contrôle sur la situation et conduit les élèves à se détacher de la situation d'action. Cependant, d'autres régularités que celles visées par l'enseignement sont parfois identifiées. Par exemple, lors de la première situation, la liste de fractions équivalentes suivante est produite : $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = ?/12$. Pour compléter la fraction $?/12$, une élève (E8) s'appuie sur les numérateurs précédents (1, 2, 3, 4) et écrit 5. Si de telles conduites invitent à être prudent dans le choix des nombres pour tenter d'éviter que des régularités ne faisant pas appel au savoir visé soient retenues, elles conduisent surtout à réfléchir au rapport entre l'identification de régularités numériques et la référence au milieu de l'action. Le contrôle par les régularités se différencie du contrôle par le sens. L'écriture mathématique favorise l'identification de régularités qui peuvent conduire à l'abstraction d'une règle rattachée au savoir visé. Or, il semble important que les élèves puissent valider cette règle, lui donner un sens, ce qui est, d'une certaine manière, la visée de la situation d'action.

Devant une conduite erronée, il semble approprié de s'appuyer sur la situation d'action pour amener les élèves à remettre en question leur solution. Or, comment s'assurer du sens lorsque les élèves fournissent des réponses valides ? Dans la séquence, particulièrement lors de la quatrième situation, l'expérimentatrice a tendance à ne pas prendre de risques. Ainsi, lorsque les élèves ont recours à une stratégie numérique, elle retourne à la situation d'action pour s'assurer qu'ils la comprennent. Par exemple, pour donner du sens à $n \div b \times a$ pour prélever a/b de n jetons, l'expérimentatrice cherche à montrer, par un travail sur les collections de jetons, à quoi correspond l'application de chacun des deux opérateurs entiers. On retrouve ici les termes d'un débat qui perdure dans l'intervention auprès des élèves faibles ou en

difficulté, soit celui du contrôle du sens et du contrôle des techniques, les stratégies numériques étant ici associées, du point de vue de l'expérimentatrice, à une technique. Ainsi, alors que la situation vise l'élaboration de stratégies numériques, lorsque les élèves y arrivent, l'expérimentatrice s'appuie sur la situation d'action pour assurer un contrôle par le sens. Cependant, ce type d'intervention est souvent peu efficace, car une fois que les élèves ont dégagé les stratégies numériques leur permettant rapidement de faire des prévisions justes, ils ne ressentent plus le besoin de revenir à la situation d'action.

Enfin, l'écriture mathématique favorise le recours à des stratégies de plus en plus élaborées sur le plan mathématique. Bien qu'on puisse parfois douter du sens donné aux règles identifiées, le retour à la situation d'action, lorsqu'une stratégie numérique est utilisée efficacement, ne favorise pas l'engagement des élèves. Si effectivement ils utilisent une règle sans toutefois maîtriser les relations engagées, ils risquent de ne pas être en mesure de l'utiliser ultérieurement (ou de l'utiliser incorrectement), avec d'autres nombres ou dans d'autres contextes. C'est alors à ce moment, selon nous, que le sens devrait à nouveau être travaillé. Dans cette perspective, le sens ne précède pas l'identification de régularités ni l'inverse d'ailleurs. Il s'agit de travailler en articulation le sens et l'identification de règles numériques sans toutefois revenir à une stratégie plus élémentaire lorsque les élèves mettent en œuvre une stratégie numérique valide.

8.2.3 Utilisation d'un langage précis centré sur le savoir en jeu

L'analyse de nos résultats nous conduit à soulever l'importance d'utiliser un langage centré sur le savoir en jeu et les relations mathématiques impliquées, plutôt qu'un langage centré sur le contexte. Le contexte vise à soutenir les relations numériques, mais ne doit toutefois pas distraire les élèves à l'égard de l'enjeu mathématique. Un langage inapproprié, soit par imprécision ou par souci de familiarité, pourrait noyer, écraser les relations mathématiques. L'analyse des interactions entre l'expérimentatrice et les élèves permet de constater la multiplication de termes employés pour un même objet ainsi que l'importance accordée au contexte. Par exemple, lors de la deuxième situation, l'expérimentatrice donne la consigne suivante : « Vous devez aller chercher, sur le bureau là-bas, le nombre de morceaux de $\frac{1}{4}$

de bande nécessaire, pour que, quand on place les morceaux un à côté de l'autre ici, on obtienne une bande-unité. » Il aurait été préférable d'utiliser un langage précis centré sur les relations mathématiques, par exemple, en formulant la consigne ainsi: « Vous devez identifier le nombre de bandes correspondant à $1/4$ de la bande-unité nécessaire pour obtenir une bande-unité. »

Nous observons, par ailleurs, que la validation des résultats constitue un moment privilégié pour dégager les relations mathématiques en jeu, facilitant ainsi la décontextualisation des connaissances. Parfois, les élèves se contentent de regarder s'ils ont réussi ou non. Il semble intéressant de s'arrêter pour identifier, dans ce que les élèves ont fait, les éléments importants à l'égard du savoir; autrement dit, pour reprendre l'expression de Douady (1984), de procéder à des institutionnalisations locales. Par exemple, lorsque les élèves apportent 4 bandes correspondant à $1/4$ de la bande-unité, l'expérimentatrice conclut : « il faut 4 bandes correspondant à $1/4$ de bande-unité pour obtenir une bande-unité, $1/4$ entre 4 fois dans 1 », préparant ainsi les élèves au moment de décontextualisation où l'écriture $4 \times 1/4 = 4/4 = 1$ sera présentée.

8.3 Conditions spécifiques à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions

Concernant les conditions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de l'équivalence des fractions, pour assurer une variété de situations, nous avons choisi de nous appuyer sur les différentes interprétations de la fraction de Kieren (1976, 1980, 1989). Une autre condition retenue, sur la base des études portant sur l'acquisition de la notion de fraction, consiste à dégager la structure multiplicative de la fraction en faisant échec aux stratégies additives dans la comparaison de fractions. L'analyse des résultats conduit par ailleurs à considérer l'importance de prendre en compte le passage codes oraux/codes écrits des fractions, particulièrement lors du pilotage des situations.

8.3.1 *L'équivalence des fractions et les interprétations de la fraction selon le modèle de Kieren*

Solliciter différentes interprétations de la fraction a été un critère crucial dans le choix des situations. Si les différentes interprétations ont servi d'appui pour assurer une variété de situations – chacune d'elles repose effectivement sur une interprétation différente – l'intention n'était toutefois pas de favoriser une juxtaposition des interprétations, mais au contraire de miser sur la variété des situations pour favoriser la coordination des interprétations. L'analyse des résultats nous permet de constater que le travail de décontextualisation a favorisé cette coordination, mais qu'un travail d'articulation entre les différentes interprétations serait toutefois à poursuivre pour bonifier la séquence. Enfin, nous appuyant sur les quatre situations expérimentées, nous discutons de l'intérêt et des limites des différentes interprétations pour l'enseignement et l'apprentissage de l'équivalence des fractions en montrant, du coup, comment les interprétations s'articulent entre elles. Nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que le fait de favoriser différentes interprétations de la fraction à l'intérieur d'une même situation favoriserait l'articulation entre les différentes situations et, ainsi, l'appropriation de l'équivalence des fractions. Il s'agit d'ailleurs d'un élément qui a sans doute été négligé dans la construction de la séquence.

8.3.1.1 Situation sur la fraction en tant que partie d'un tout

L'interprétation partie/tout est souvent utilisée pour l'enseignement de l'équivalence des fractions en montrant, sur un tout de référence continu, que la même surface est obtenue en prélevant a/b et c/d de ce tout. Une façon moins courante de recourir au sens partie/tout pour enseigner l'équivalence des fractions consiste, au lieu de mettre en relation chaque fraction avec un même tout de référence, à mettre en relation deux fractions entre elles en se référant à un même tout. C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans la première situation de notre séquence, dans laquelle le but pour les élèves consiste à identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure, où b est multiple de d . Notons que tout comme l'interprétation mesure, la fraction a/b est alors interprétée à partir de l'itération de $1/b$, a ne pouvant cependant être plus grand que b . Mettre en relation

deux parties appartenant à un même tout de référence conduit à établir la relation multiplicative entre les fractions. Une stratégie possible consiste à partitionner mentalement les figures, ce qui sollicite bien souvent des connaissances sur les structures multiplicatives. Par exemple, pour identifier le nombre de pièces de $1/12$ d'un rectangle nécessaire pour recouvrir $1/3$ de ce rectangle, un élève peut chercher comment partitionner le rectangle en 12 parties égales. La connaissance des faits multiplicatifs (en l'occurrence, $3 \times 4 = 12$) permet alors d'identifier qu'il faut 4 pièces de $1/12$ pour recouvrir $1/3$. Ainsi, les stratégies de partition de la figure et les stratégies multiplicatives s'articulent. Si les élèves peuvent recourir aux stratégies multiplicatives pour procéder à la partition d'une figure, ils peuvent également, au contraire, s'appuyer sur la partition pour identifier les calculs à effectuer. Enfin, il est intéressant de travailler l'équivalence des fractions à partir de l'interprétation partie/tout en élaborant des activités qui favorisent la coordination entre les stratégies de partition et les stratégies faisant appel aux structures multiplicatives.

Pour favoriser l'articulation entre différentes interprétations de la fraction, il aurait par ailleurs été possible de mettre en relation deux parties d'un même tout de façon à solliciter le sens opérateur, et plus particulièrement l'interprétation *duplicator/partition-reducer* du sens opérateur (Behr et ses collaborateurs, 1993). Le sens opérateur n'est alors pas associé à la transformation d'une grandeur, mais plutôt à la modification de la référence. La fraction qui représente la partie d'un tout diffère en fonction de ce à quoi on se réfère. La première situation permet de travailler ce sens. On peut effectivement s'appuyer, par exemple, sur le fait qu'il faut 4 pièces correspondant à $1/12$ d'une figure pour recouvrir $1/3$ de cette figure ($4 \times 1/12 = 1/3$), pour montrer que $1/12$ d'une figure correspond au $1/4$ du $1/3$ de cette figure ($1/12 \times 1 = 1/4 \times 1/3$).

De plus, une variable intéressante permettant de dépasser la conception selon laquelle deux fractions sont équivalentes si elles représentent la même quantité, serait de travailler à partir de différents tous de référence. Une fraction a/b et une fraction c/d font référence alors chacune à un tout différent, pouvant être continu ou discret. L'équivalence de ces fractions s'explique par le fait que dans les deux fractions, la partie entre n fois dans le tout, chaque partie étant ainsi traitée en relation avec son tout de référence. L'interprétation partie/tout est ainsi traitée en articulation avec l'interprétation rapport : deux fractions sont équivalentes si

le rapport entre la partie et le tout est le même. Notre séquence aurait bénéficié de la mise en place d'une activité qui relève d'une telle analyse.

8.3.1.2 Situation sur la fraction en tant que mesure

Selon l'interprétation mesure, l'équivalence des fractions s'explique par l'équivalence de deux mesures. Tout comme dans l'interprétation partie/tout, cette interprétation conduit essentiellement à associer l'équivalence des fractions à l'égalité des quantités. Pour favoriser le sens rapport, il serait cependant possible de modifier l'unité de mesure : deux fractions seraient ainsi jugées équivalentes si le rapport entre l'unité de mesure et la mesure est le même.

L'interprétation mesure présente différents intérêts pour travailler l'équivalence des fractions. D'abord, elle permet de traiter les fractions impropres ainsi que leur relation avec les nombres fractionnaires. Par exemple, $2 \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, car la même longueur est obtenue en reportant 9 fois $\frac{1}{4}$ de bande qu'en reportant 2 fois une bande et en y ajoutant $\frac{1}{4}$ de bande. Il aurait d'ailleurs été pertinent de mettre en évidence la relation entre $2 \frac{1}{4}$ et $2 + \frac{1}{4}$, car si la juxtaposition du nombre entier et de la fraction dans un nombre fractionnaire est traitée comme une addition, la juxtaposition de nombres signifie en algèbre une multiplication. Enfin, choisir des fractions équivalentes à un nombre naturel, en raison des connaissances des élèves sur les faits multiplicatifs, a favorisé l'établissement de la relation entre une fraction, une division et un nombre entier. On constate d'ailleurs une amélioration considérable entre le prétest et le posttest concernant l'équivalence entre une fraction et un nombre entier (question 3). Cependant, comme le montrent les résultats au posttest, les élèves ne sont pas en mesure d'utiliser ces connaissances pour identifier une fraction sur une droite numérique où sont repérés des nombres naturels (question 9). Des exercices portant spécifiquement sur la droite numérique pourraient participer à l'appropriation de la fraction en tant que nombre. L'équivalence des fractions pourrait du coup être travaillée en montrant que deux fractions sont équivalentes si elles sont situées sur un même point de la droite.

8.3.1.3 Situation sur la fraction en tant que rapport

L'interprétation de la fraction en tant que rapport est intimement liée à l'équivalence des fractions. Dans la troisième situation, portant sur le sens rapport, les connaissances des élèves évoluent au cours de la situation d'action, mais des difficultés importantes sont relevées en ce qui a trait à la décontextualisation des connaissances. Nous relevons deux facteurs explicatifs concernant les difficultés des élèves à concevoir l'équivalence des fractions selon le sens rapport : premièrement, ce sens rompt avec la conception consistant à considérer équivalentes des fractions si elles représentent la même quantité; et deuxièmement, dans notre situation, tout comme dans les problèmes classiques sollicitant le sens rapport, les rapports ne s'expriment pas sous la forme fractionnaire, mais plutôt à l'aide de nombres entiers. Ainsi, nous faisons l'hypothèse qu'il est particulièrement important de travailler cette interprétation en articulation avec d'autres interprétations.

Dans la troisième situation de la séquence qui, rappelons-le, vise la production de rapports égaux dans le cadre d'un problème de quatrième proportionnelle en contexte de mesure d'un bonhomme, les rapports sont effectivement exprimés à l'aide de nombre entiers : si un bonhomme A mesure a trombones et b boutons, un bonhomme B mesure c trombones et d boutons. Dans chacun des problèmes présentés, soit l'opérateur fonction (relation multiplicative entre a et b), soit l'opérateur scalaire (relation multiplicative entre a et c) correspond à un nombre entier. Ainsi, il n'est pas nécessaire de recourir aux fractions pour solutionner les problèmes. Cette situation est efficace pour développer le sens rapport, c'est-à-dire que les élèves recourent de plus en plus à des stratégies multiplicatives pour identifier les mesures manquantes. Cependant, la relation entre ce que les élèves ont produit et l'écriture fractionnaire est à la charge de l'expérimentatrice. Les moments de décontextualisation visent d'abord à montrer que a pour b est équivalent à c pour d (d étant multiple de b) parce qu'il y a toujours a pour b dans c pour d , et ensuite à établir la relation entre ces rapports, formulés à partir de nombres entiers, et l'écriture fractionnaire $a/b = c/d$. Établir cette relation est un défi important parce que, dans le cas présent, la situation ne l'exige pas et surtout, selon nous, parce que cela va à l'encontre de la conception qu'ont les élèves de l'équivalence des fractions.

Pour aider les élèves à concevoir l'équivalence des fractions selon l'interprétation rapport, travailler cette interprétation en articulation avec d'autres interprétations permettrait de travailler, à la fois, à partir et contre les connaissances des élèves. Comme d'autres recherches avant nous (Streefland, 1991; Empson et ses collaborateurs, 2006; Ghailane, 2015), nos résultats montrent que les problèmes de partage sont intéressants pour favoriser l'articulation entre différentes interprétations. Au terme de la troisième situation, un problème est présenté dans lequel il faut comparer qui a le plus de pizzas entre les garçons et les filles s'il y a a pizzas pour b garçons et c pizzas pour d filles. Ce problème peut être solutionné en ayant recours au sens rapport, mais il peut également être solutionné en ayant recours aux sens quotient et partie/tout. En effet, une stratégie possible consiste à identifier la part de chaque personne, le problème étant alors interprété comme un problème de partage souvent associé au sens quotient. De plus, le fait que les pizzas et les personnes soient représentées à l'aide d'illustrations encourage sans doute le recours à des stratégies faisant appel au sens partie/tout. Ce problème favorise donc l'articulation entre les interprétations rapport, quotient et partie/tout : a pizza pour b personnes, partager a pizzas entre b personnes (ce qui peut être associé à $a \div b$) et a/b pizza par personne. La fraction a/b peut être interprétée comme le rapport a pour b , comme le résultat de $a \div b$ et/ou à partir de la partition d'une pizza où a parts sur b parts sont prélevées. L'interprétation mesure peut également être sollicitée : s'il y a a pizzas et b personnes, chaque personne obtient $1/b$ de chaque pizza, donc en tout $a \times 1/b = a/b$. Enfin, pour amener les élèves à interpréter l'équivalence des fractions en termes de rapport, il semble nécessaire de prévoir des activités dans lesquelles l'interprétation rapport est travaillée en articulation avec d'autres interprétations. Le cas des problèmes de partage n'est qu'un exemple parmi tant d'autres.

8.3.1.4 Situation sur la fraction en tant qu'opérateur

Le sens opérateur est rarement convoqué pour travailler l'équivalence des fractions. La quatrième situation de la séquence vise à travailler l'équivalence des fractions en articulation avec le sens opérateur en montrant que deux fractions sont équivalentes si la transformation qu'elles opèrent sur une même quantité est identique. Le but pour les élèves, au scénario 1 de cette situation, consiste à identifier si on obtient la même quantité de jetons en prélevant a/b

d'une collection de n jetons ($n < 61$) qu'en prélevant c/d de cette collection. Le sens opérateur est alors travaillé en articulation avec le sens partie/tout (le tout étant en l'occurrence discret). Le scénario ajouté, ne donnant pas la valeur de n , et le scénario 2, ne faisant pas référence au contexte des jetons, visent à délaissier le sens partie/tout au profit du sens opérateur. Or, notre recherche montre qu'il est difficile de s'appuyer sur le sens opérateur pour travailler l'équivalence des fractions sans tomber dans l'application de « techniques de calculs ». En effet, les élèves décomposent l'opérateur fractionnaire en deux opérateurs entiers et comparent ensuite les résultats obtenus après chacune des transformations pour comparer les fractions. Ainsi, la fraction n'est pas interprétée en fonction de la transformation qu'elle a générée, autrement dit la mesure initiale et la mesure finale ne sont pas mises en relation par le biais d'un opérateur fractionnaire, mais simplement par deux opérateurs entiers.

Pour élaborer des situations permettant de travailler l'équivalence des fractions en articulation avec le sens opérateur, nous identifions deux variables à considérer : le type de tout (continu ou discret) et ce qui est recherché (la mesure initiale, l'opérateur fractionnaire ou la mesure finale). Les situations portant sur la réduction ou l'agrandissement d'un tout continu sont favorables au développement des connaissances sur le sens opérateur, et ce, en articulation avec d'autres interprétations de la fraction (Blouin, 1993). Or, dans leur forme classique, ces situations ne visent pas un travail sur l'équivalence des fractions. Il serait sans doute intéressant d'explorer les adaptations possibles pour voir ce que peut offrir ce type de situations pour l'enseignement et l'apprentissage de l'équivalence des fractions. Nous considérons par ailleurs que la mesure recherchée est d'une grande importance pour éviter que la situation faisant appel à la fraction opérateur soit interprétée exclusivement comme l'application successive de deux opérateurs entiers à des collections. Dans la situation présentée, la mesure initiale et la transformation sont données. Il pourrait être intéressant de donner la mesure initiale (ex. : 8 jetons) et la mesure finale (ex. : 10 jetons) et de demander aux élèves d'identifier l'opérateur fractionnaire permettant de passer d'une mesure à l'autre. C'est d'ailleurs un des principes de la situation emblématique du puzzle (en contexte continu) de Brousseau (1998).

Enfin, si la quatrième situation de la séquence n'est pas optimale pour favoriser le développement des connaissances sur le sens opérateur de la fraction, elle a néanmoins

quelques vertus didactiques. D'abord, elle rend utile le développement de procédures pour identifier a/b de n jetons et conduit à établir la relation entre ces procédures et le calcul $n \div b \times a$, le sens opérateur de la fraction étant ainsi convoqué en articulation avec le sens partie/tout. Le sens mesure est également sollicité : $n \div b$ étant associé à $1/b$ de n et $\times a$, au nombre de fois que l'on doit itérer $1/b$ pour identifier a/b de n . Elle favorise ainsi l'apparition d'une nouvelle stratégie pour comparer des fractions : a/b est comparée à c/d en comparant $n \div b \times a$ et $n \div d \times c$. Certains élèves compareront même $\div b \times a$ et $\div d \times c$ sans tenir compte de la valeur de n . C'est notamment le cas de l'élève E2 qui juge que $17/3$ est une fraction plus grande que $13/3$ parce que dans la première fraction, *on multiplie par plus*. De plus, le sens rapport est convoqué pour interpréter les fractions impropres : la fraction a/b ne représente alors plus la partie d'une collection de jetons, mais le rapport entre deux collections de jetons. Bref, un intérêt non négligeable de cette situation est qu'elle favorise l'articulation entre le sens partie/tout, le sens opérateur, le sens mesure, le sens rapport et l'équivalence des fractions.

8.3.2 *L'équivalence des fractions et la structure multiplicative de la fraction*

La séquence d'enseignement proposée vise l'appropriation de la notion de fractions équivalentes en articulation avec l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction. Les difficultés des élèves à articuler les connaissances sur les structures multiplicatives et celles sur les fractions reposent en partie sur les méthodes d'enseignement, où la fraction a/b est interprétée comme étant a parties prélevées sur un tout séparé en b parties égales, le numérateur et le dénominateur pouvant alors être traités comme deux nombres naturels. Dans cette section, nous montrons d'abord en quoi les situations de la séquence favorisent l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction et, ensuite, que les difficultés, pour l'apprentissage tout comme pour l'enseignement, ne relèvent pas tant de la prégnance de la pensée additive, que de la complexité du raisonnement multiplicatif pour comparer des fractions.

Les deux premières situations impliquent essentiellement la recherche de a dans la relation $a \times 1/b = c/d$. Pour ce faire, une stratégie efficace consiste à s'appuyer sur la relation

multiplicative $b \times 1/b = 1$. Par exemple, pour identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/6$ d'une figure nécessaire pour recouvrir $1/2$ de cette figure ($a \times 1/6 = 1/2$), on identifie qu'il faut 6 pièces de $1/6$ pour recouvrir la figure entière et donc 3 pièces de $1/6$ pour recouvrir $1/2$ de la figure. La relation $a \times 1/b = a/b$ est ensuite mise en oeuvre lors du moment de décontextualisation. Pour reconnaître que $2/4 = 3/6$, il faut effectivement reconnaître que 2 pièces de $1/4$ est égal à $2/4$ ($2 \times 1/4 = 2/4$) et que 3 pièces de $1/6$ est égal à $3/6$ ($3 \times 1/6 = 3/6$). Les listes de fractions équivalentes produites amènent finalement à considérer la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur.

La troisième et la quatrième situation, en plus de travailler l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction, visent à mettre en échec les stratégies additives. Dans la troisième situation, pour identifier la quatrième donnée d'un problème de quatrième proportionnelle, la stratégie additive fondée sur la différence entre les deux unités de mesure est abandonnée au profit de la stratégie multiplicative fondée sur la relation scalaire. Ainsi, il semble que le milieu, c'est-à-dire les mesures du bonhomme à l'aide de l'unité de mesure appropriée et les traces écrites des données dans un tableau, permettent de reconnaître l'inadéquation des stratégies additives et également, pour certains élèves, de dégager des stratégies multiplicatives adéquates. Quant à la quatrième situation, elle rend inefficace la stratégie qui consiste à considérer équivalentes des fractions dont l'écart entre le numérateur et le dénominateur est le même. Elle permet, de plus, de faire échec à la conception selon laquelle lorsque les fractions sont inférieures à 1, plus l'écart entre le numérateur et le dénominateur est petit, plus la fraction est grande, et lorsqu'il s'agit de fractions impropres, plus l'écart entre le numérateur et le dénominateur est grand, plus la fraction est grande.

Il paraît important de souligner que dans notre recherche, bien que des conduites additives soient couramment utilisées, la conduite la plus fréquente consiste à considérer que plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande, et ce, sans tenir compte du numérateur. Cette conception, largement présente chez les trois groupes d'élèves, suggère que l'enseignement de cette « règle » n'est pas anecdotique. Nous faisons l'hypothèse qu'elle est enseignée en classe – sans doute à partir de fractions ayant des numérateurs communs – pour éviter que les élèves s'appuient sur leurs connaissances sur les naturels qui conduiraient à considérer que si $b > c$ alors $a/b > a/c$. Les difficultés inhérentes à la comparaison de

fractions semblent conduire les enseignants comme les élèves à rechercher une façon de simplifier la comparaison. Comparer des fractions est effectivement complexe : cela exige de comparer deux relations, autrement dit d'établir une relation entre deux relations. Ainsi, pour comparer a/b et c/d , il est possible de comparer la relation multiplicative entre a et c et celle entre b et d ou de comparer la relation multiplicative entre a et b et celle entre c et d . Considérer uniquement le dénominateur permet de traiter seulement un invariant, ce qui est plus simple mais malheureusement insuffisant. De même, l'enseignement classique consistant à mettre les fractions sous un dénominateur commun évite le traitement des relations multiplicatives pourtant essentielles à la compréhension de la notion de fraction. En effet, cette technique permet de ne pas considérer plusieurs relations simultanément en se centrant simplement sur la comparaison des deux numérateurs, pris comme naturels.

Notons, par ailleurs, que l'écart entre la mise en œuvre d'une stratégie et la formulation de celle-ci semble particulièrement important dans le cas de comparaisons de fractions impliquant des relations multiplicatives non entières. En raison des limites des connaissances des élèves sur les structures multiplicatives dans les nombres rationnels, exprimer verbalement le rapport fractionnaire paraît difficile. Par exemple, un élève peut considérer que $3/5$ est plus petit que $3/4$ en adoptant un raisonnement multiplicatif, mais expliquer son choix en s'appuyant sur l'écart entre le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions, ce qui suggère faussement un raisonnement additif.

8.3.3 Le passage codes oraux/codes écrits des fractions

Nous observons, dans la séquence, un écart entre ce qui est exprimé à l'oral et à l'écrit. Il arrive effectivement que certains raisonnements justes soient exprimés oralement, mais que des difficultés à l'égard du savoir soient rencontrées lors du passage de l'oral à l'écrit. De telles difficultés sont particulièrement présentes lors d'activités impliquant des fractions impropres ou des nombres fractionnaires. Par exemple, des élèves, lors de la deuxième situation, reconnaissent qu'un segment mesure deux bandes et demie, mais ne sont pas en mesure d'écrire un message exprimant la mesure de ce segment. Certains nombres, rarement

traités en classe, peuvent ainsi être exprimés oralement, mais leur transcodage à l'écrit pose des difficultés (ex. : associer l'écriture $5 \frac{1}{2}$ à « cinq moitiés »).

Notons, par ailleurs, que la lecture des fractions se fait souvent en séparant le numérateur et le dénominateur par le mot « sur », exprimant ainsi a/b par « a sur b ». Cette formulation suggère que a est inclus dans b et peut donc favoriser l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout. Nous faisons l'hypothèse que les codes oraux participent à la conception de la fraction des élèves, c'est-à-dire qu'ils influencent leur façon de concevoir les fractions, ce qui ne signifie toutefois pas que leur usage découle de leur conception de la fraction. La formulation orale « a sur b » est sans doute en grande partie utilisée pour sa simplicité. D'une part, elle permet de nommer a et b comme s'il s'agissait de deux nombres entiers représentant des cardinaux (exemple : cinq sur sept), alors que dans les codes oraux adéquats, a se nomme comme un nombre cardinal et b , comme un nombre ordinal (exemple : cinq septièmes). D'autre part, la formulation « a sur b » ne présente aucune exception. Pour passer des codes écrits aux codes oraux, il faut nommer le numérateur et ensuite le dénominateur en y ajoutant le suffixe « ième » (ex. : « sept huitièmes » pour $7/8$), ce qui n'est pas le cas pour les fractions dont le dénominateur est 2, 3 et 4. Concernant les fractions ayant 2 comme dénominateur, deux expressions sont possibles : « moitié » et « demie ». L'expression « moitié » est sans doute plus familière, mais l'expression « demie » facilite la liaison avec l'écriture fractionnaire $a/2$. Quant aux expressions « tiers » et « quarts », elles posent souvent des difficultés aux élèves. L'écriture de ces fractions semble donc particulièrement importante pour l'identification des relations numériques avec d'autres nombres. Par exemple, je puis plus facilement juger que « deux quarts » est une fraction équivalente à « trois sixièmes » si j'associe à ces codes oraux, les codes écrits $2/4$ et $3/6$.

De plus, alors que l'écriture permet de différencier a/b et $a \times 1/b$, il en est autrement à l'oral. Par exemple, lors de la première situation, on doit compléter un bon de commande sur lequel est indiqué : *J'ai besoin de ____ pièces correspondant à $1/4$ du cercle pour recouvrir $1/2$ cercle.* Cette situation vise notamment à établir la relation entre $2 \times 1/4$ et $2/4$. Cependant, à l'oral, les élèves expliquent qu'ils ont besoin de « deux quarts », ce qui peut aussi bien être interprété comme $2/4$ que comme $2 \times 1/4$. Étant donné que la commande ne se fait pas à l'oral mais à l'aide du bon de commande, les élèves, pour réussir la tâche, doivent être en

mesure d'interpréter « deux quarts » comme $2 \times 1/4$, ce qui permet de solliciter l'interprétation de la fraction en tant que mesure. Enfin, si les codes oraux génèrent certaines confusions dans cette situation, ils sont néanmoins aidants, selon nous, pour l'établissement de l'équivalence entre a/b et $a \times 1/b$.

8.4 Conclusion

Pour conclure, nous résumons les éléments soulevés dans ce chapitre en formulant des hypothèses concernant les conditions didactiques favorables à l'intervention en contexte orthopédagogique, présentées sous forme d'un tableau pour plus d'intelligibilité (voir tableau 8.1). Rappelons qu'il s'agit, dans la plupart des cas, de conditions retenues dans les écrits scientifiques que nous avons explorées en contexte orthopédagogique. Nous distinguons, d'une part, les conditions d'ordre général et les conditions spécifiques à l'équivalence des fractions et, d'autre part, les conditions relatives à la construction des activités et celles portant sur leur pilotage.

Tableau 8.1
Hypothèses concernant les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur l'équivalence des fractions

	Conditions d'ordre général		Conditions spécifiques à l'équivalence des fractions
	Conditions relatives à l'adidacticité des situations	Conditions relatives à la décontextualisation des connaissances	
Conditions pour la construction des activités	<ul style="list-style-type: none"> - Organiser le milieu de façon à ce que certaines prévisions soient retenues en équipe et d'autres, en individuel - Aménager le milieu de façon à ce qu'il fournisse des rétroactions rapides permettant d'interpréter ce qui fonde le résultat - Choisir les valeurs des variables didactiques relatives au domaine numérique en fonction des connaissances des élèves - Manipuler la valeur de la variable « matériel » en tenant compte de la façon dont la présence du matériel interagit avec les valeurs des autres variables didactiques de la situation 	<ul style="list-style-type: none"> - Assurer une variété de situations mathématiques - Procéder à un va-et-vient entre les différentes situations pour favoriser l'établissement de relations entre celles-ci - Construire des situations qui favorisent une articulation entre la référence au milieu d'action et l'identification de régularités numériques - Prévoir des activités conventionnelles (exercices et énoncés de problème) qui reposent sur le même contenu que la situation d'action (ou des contenus qui lui sont intimement liés) 	<ul style="list-style-type: none"> - Couvrir différentes interprétations de la fraction, selon le modèle de Kieren - Présenter des situations convoquant plus d'une interprétation - Travailler l'équivalence des fractions en favorisant l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction
Conditions pour le pilotage des activités	<ul style="list-style-type: none"> - Modifier le milieu, si nécessaire, de façon à ce que les interactions élèves/milieu évoluent vers la mise en œuvre de stratégies faisant appel à la connaissance visée par l'enseignement - Soutenir les élèves, si nécessaire, dans la mise en œuvre, la formulation et la validation de stratégies - Prendre en compte les objets de savoir non prévus mais néanmoins investis par les élèves 	<ul style="list-style-type: none"> - Recourir à l'écriture mathématique de façon à identifier à l'écrit les éléments importants à l'égard du savoir - Utiliser un langage mathématique précis centré sur le savoir en jeu - Encourager le recours à des stratégies élaborées sur le plan mathématique - Si nécessaire, établir la relation entre les activités conventionnelles et la situation d'action 	<ul style="list-style-type: none"> - Tenir compte de l'écart entre la mise en œuvre et la formulation de stratégies faisant appel à un raisonnement multiplicatif pour comparer des fractions - Prendre en compte le transcodage codes oraux/ codes écrits des fractions

CHAPITRE IX

CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous relevons d'abord les apports de notre recherche qui, d'une part, contribue à enrichir la réflexion sur l'intervention en mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage et, d'autre part, permet d'identifier des conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Nous présentons ensuite les limites méthodologiques de notre recherche et énonçons quelques perspectives qui permettraient de prolonger l'étude actuelle.

9.1 Intervention en mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage

Nous portons, dans la thèse, un regard critique sur les discours de la noosphère⁹³ scolaire québécoise. Le programme de formation de l'école québécoise (2001) étant axé sur le développement de compétences, les enseignants ont comme mandat, en mathématiques, de développer chez leurs élèves trois compétences disciplinaires⁹⁴. Par conséquent, ce ne sont pas tant les savoirs mathématiques qui font l'objet d'évaluation, mais plutôt les compétences auxquelles se rattachent ces savoirs. Ce changement a inévitablement un impact sur la façon de concevoir les difficultés d'apprentissage et donc, également, de penser l'intervention. En effet, comme ce sont les compétences disciplinaires qui sont évaluées, les difficultés d'apprentissage sont interprétées au regard des compétences visées, ce qui conduit à rechercher des méthodes d'intervention pour remédier ou compenser les compétences jugées déficientes de l'élève, plutôt que des méthodes qui s'appuient sur la spécificité du savoir. De plus, tout comme le MELS, l'ADOQ privilégie une approche qui tient compte des

⁹³ La noosphère correspond, selon Sarrazy (2002), « à une partie de l'espace social dans laquelle les représentants du système d'enseignement (les membres des commissions ministérielles, les représentants de la société – parents d'élèves, spécialistes de la discipline, auteurs de manuels, des revues scientifiques ou militantes...) « pensent », négocient, débattent de ce qu'il convient de faire ou de changer dans le système d'enseignement » (p.11).

⁹⁴ Selon le programme ministériel, les trois compétences disciplinaires en mathématiques sont les suivantes : 1) Résoudre une situation-problème; 2) raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques; 3) communiquer à l'aide du langage mathématique.

spécificités individuelles des élèves, notamment en proposant d'adapter les interventions en fonction des besoins, des modes d'apprentissage et des processus cognitifs et métacognitifs des élèves. Les orthopédagogues sont ainsi imprégnés dans leur pratique de discours qui s'inscrivent dans la logique cognitiviste plutôt que didactique, alors que dans leur formation initiale, il y a environ deux fois plus de cours qui portent sur la didactique d'une discipline que de cours à caractère psychologique.

La place importante que prennent les sciences cognitives dans la noosphère scolaire depuis quelques années conduit les enseignants à rechercher des causes cognitives ou affectives pour expliquer les difficultés d'apprentissage. Or, selon l'étude menée par Roiné (2009), l'idéologie mentaliste, où le regard est centré sur l'élève, favorise la mise en œuvre de dispositifs spécifiques qui ne reposent pas sur une analyse didactique. Par exemple, l'enseignement d'une démarche de résolution de problème sera choisi dans le but de développer les compétences métacognitives des élèves, ou encore l'usage de matériel pédagogique sera justifié par le besoin qu'auraient les élèves de manipuler pour apprendre les mathématiques. Selon Roiné, ce type de dispositifs, mis en place pour répondre aux besoins des élèves, ne serait pas favorable à l'apprentissage en mathématiques. Il conduirait au contraire à des *glissements métacognitifs*⁹⁵ ainsi qu'à des effets *Topaze*⁹⁶ et *Jourdain*⁹⁷.

Il est bien sûr légitime, dans la pratique comme dans la recherche, de chercher à comprendre les raisons pour lesquelles, avec les mêmes méthodes d'enseignement, certains élèves réussissent et d'autres non. De nombreuses études provenant de domaines variées se sont d'ailleurs intéressées à cette problématique. Certains travaux s'intéressent aux causes physiques et psychologiques des difficultés, alors que d'autres s'intéressent à l'origine sociale de l'élève et de sa famille ou encore à la part de l'école dans la « fabrication » de l'élève en difficulté (Perrenoud, 1995; Roiné, 2015). Les causes des difficultés d'apprentissage sont multiples et, de plus en plus, les chercheurs tentent d'expliquer le phénomène non pas uniquement à partir d'une cause, mais de leur interaction (Boutin et Daneau, 2004). Ainsi, la locution « difficulté d'apprentissage » est grandement générique,

⁹⁵ L'objet d'enseignement n'est plus le savoir mais la mesure d'aide.

⁹⁶ L'effet Topaze est défini à la page 268.

⁹⁷ « Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales » (Sarrazy, 2002, p. 160).

c'est-à-dire qu'elle est utilisée pour désigner tout insuccès scolaire, peu importe sa source. Comme les sources des difficultés d'un élève sont à la fois multiples et difficiles à identifier, il semble complexe de penser aux adaptations selon les besoins des élèves. On pourrait, par exemple, adapter une situation pour des élèves aveugles parce qu'on sait ce qui les caractérise: ils ne voient pas. Mais qu'est-ce qui différencie les élèves dits en difficulté d'apprentissage des élèves qui ne le seraient pas ?

En mathématiques, ce sont bien souvent les mêmes difficultés qui sont rencontrées par les élèves lors de l'appropriation d'un savoir donné, que ce soit des élèves « ordinaires », des élèves dits en difficulté d'apprentissage ou même des élèves ayant reçu un diagnostic de dyscalculie. Considérant que chaque savoir mathématique est spécifique, l'apprentissage d'un savoir consiste alors à s'approprier ses caractéristiques. Il est possible de penser que certaines d'entre elles sont plus résistantes à l'apprentissage et présentent donc des défis particuliers. Ainsi, la nature même des difficultés rencontrées dans l'appropriation d'un savoir relèverait davantage des spécificités du savoir que de celles des élèves. On comprend dès lors pourquoi les études didactiques sont nombreuses à porter sur l'identification des difficultés propres à l'apprentissage d'un savoir indépendamment des caractéristiques des élèves qui éprouvent ces difficultés. Pour intervenir, présenter des situations en adéquation avec le savoir visé apparaît donc essentiel. En effet, le choix des situations est déterminant, car c'est à partir de questionnements, d'anticipations, d'hypothèses, d'essais, que les élèves produisent les mathématiques. L'apprentissage des mathématiques va bien au-delà de la connaissance formelle de définitions et de techniques; pour apprendre les mathématiques, il faut en faire, et...

Faire des maths, c'est les FAIRE, au sens propre du terme, les construire, les fabriquer, les produire, que ce soit dans l'histoire de la pensée humaine ou dans l'apprentissage individuel. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire réinventer par les élèves des mathématiques qui existent déjà, mais de les engager dans un processus de production mathématique où leur activité ait le même sens que celle des mathématiciens qui ont effectivement forgé des concepts mathématiques nouveaux. (Bkouche, Rouche, et Charlot, 1992, p. 174)

Enfin, nous avons choisi, dans notre recherche, de ne pas suivre la mouvance actuelle et d'explorer ce que peut offrir un cadre de référence didactique pour penser l'intervention en

mathématiques auprès d'élèves en difficulté. Nous avons plus particulièrement exploré le potentiel de la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998) pour intervenir auprès de ces élèves. Si, comme nous le verrons à la section suivante, cette théorie apparaît fort utile pour l'intervention en contexte orthopédagogique, nous ne pouvons cependant passer sous silence les difficultés rencontrées lors des interventions auprès des élèves du groupe AS. Dans ce groupe, plus que dans les deux groupes OR, il est arrivé que les stratégies initiales, prévues pour être mises en défaut par le jeu sur les valeurs des variables didactiques, n'aient pas été mises en œuvre par les élèves. L'analyse *a priori* d'une situation adidactique implique en effet d'identifier des stratégies initiales, ou encore un modèle d'action (Brousseau, 1998) par lequel l'élève peut entrer en situation et établir un premier rapport avec le milieu adidactique. Ce premier rapport est essentiel pour obtenir une rétroaction du milieu qui, elle-même, doit être lisible par l'élève à partir de ses connaissances afin d'adapter sa stratégie en fonction des contraintes de la situation. Or, il est apparu que les élèves issus de la classe d'adaptation scolaire n'ont pas agi selon ce qui était prévu à l'analyse *a priori*. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées sur ce décalage. Cependant, celle qui nous paraît la plus probable est à l'effet que la liberté que les enseignants d'adaptation scolaire prennent au regard du programme fait en sorte qu'ils sélectionnent les contenus qu'ils jugent essentiels et négligent ceux qui, au contraire, leur paraissent moins importants. Si ces décisions affectent les apprentissages des élèves, elles affectent également ce sur quoi on peut compter pour modéliser une situation adidactique. Par exemple, dans le cas des élèves du groupe AS, aucun enseignement sur les tables de multiplication n'avait été réalisé en classe. Il n'est donc pas étonnant que ces élèves, par exemple, n'aient pas identifié la régularité numérique lors de la production d'une liste de fractions équivalentes à $1/3$ telle que prévue à l'analyse *a priori*. Une certaine prudence apparaît cependant nécessaire quant à la notion de « préalables ». Le fait d'interpréter les erreurs des élèves comme étant la conséquence d'un manque de connaissances « préalables » peut conduire à une forme de spirale (Cange et Favre, 2003), où chaque erreur d'élèves conduit à détourner l'enseignement de son objet initial. Dans notre recherche, même si les élèves de ce groupe n'ont pas nécessairement adopté les conduites prévues, les situations ont favorisé leur engagement mathématique et leur apprentissage. Ainsi, les difficultés rencontrées semblent concerner davantage l'expérimentatrice – qui

cherchait en vain comment modifier le milieu pour faire évoluer les interactions élèves/milieu en fonction de l'intention didactique poursuivie – que les élèves !

9.2 Identification de conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction

Dans notre recherche, nous n'avons pas tenté d'adapter les interventions en fonction de la spécificité des élèves, mais plutôt en fonction de la spécificité des interactions entre l'enseignement et l'apprentissage en contexte orthopédagogique. La recherche a ainsi permis d'énoncer quelques fondements didactiques pour intervenir dans ce contexte. Pour engager les élèves dans un travail mathématique et les amener à agir en fonction de la logique interne de la situation, nous nous sommes appuyée sur la notion de situations adidactiques (Brousseau, 1998). Les résultats montrent la pertinence de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique. Malgré les contraintes spécifiques à ce contexte, les élèves des trois groupes recherchent activement des solutions et sont dans l'expectative de la rétroaction. L'adidacticité des situations a ainsi permis de modifier le contrat de dépendance et de contrer certains phénomènes didactiques identifiés comme nuisibles à la progression dans le savoir dans les études en didactique des mathématiques en contexte d'adaptation scolaire. L'organisation du rapport élève/milieu dans la construction de nos situations a généralement conduit les élèves à tenter de rééquilibrer le milieu lorsque la rétroaction de ce dernier l'a mis en déséquilibre. Sur la base de l'interprétation de la rétroaction du milieu, les élèves modifient, au besoin, leur stratégie inefficace. La rétroaction du milieu évite ainsi à l'expérimentatrice de prendre à sa charge la rétroaction, ce qui souvent conduit, comme le montrent les études, à un morcellement de la tâche.

De plus, la recherche permet de préciser le rôle de l'orthopédagogue dans les situations à dimension adidactique. En raison de la proximité entre l'orthopédagogue et les élèves, lorsqu'une situation ne favorise pas la mise en œuvre de la stratégie faisant appel à la connaissance visée par l'enseignement, l'orthopédagogue est appelé, dans le vif des échanges, à modifier judicieusement le milieu, et donc la nature de la tâche, pour favoriser la rencontre avec le savoir. Nous ne considérons toutefois pas le contrat didactique et le milieu

comme des éléments opposés. Autrement dit, les élèves n'agissent pas soit en fonction des exigences qu'ils croient être attendues par l'orthopédagogue, soit en fonction des exigences de la tâche. Ces deux éléments sont plutôt traités simultanément, bien que l'un d'eux puisse prendre une place plus importante. Comme le montre Hersant (2014), si le contrat didactique peut parfois priver les élèves d'une activité mathématique consistante, bien souvent la relation contrat/milieu s'avère fort utile pour préserver l'activité mathématique des élèves. Il est ainsi possible de s'appuyer conjointement sur le contrat didactique et sur le milieu pour favoriser l'activité mathématique. Nos résultats montrent effectivement que l'orthopédagogue peut participer aux échanges de manière à optimiser les interactions entre les élèves à propos du savoir en les soutenant, lorsque nécessaire, dans la mise en œuvre, la formulation et la validation de stratégies. Autrement dit, l'essentiel, dans le pilotage des situations, est d'intervenir de façon à ce que les actions des élèves demeurent essentiellement gérées en fonction de la logique interne de la situation.

Par ailleurs, étant donné les difficultés des élèves concernant la décontextualisation des connaissances, il est nécessaire de penser à des conditions permettant aux élèves de passer d'une connaissance locale à un savoir culturel en contexte orthopédagogique, d'autant plus que l'enseignant de la classe, ayant peu ou pas accès à ce que les élèves font en orthopédagogie, pourra difficilement rappeler les situations vécues pour les relancer. La décontextualisation des connaissances est donc nécessaire pour que les élèves puissent utiliser en classe ce qu'ils ont appris en orthopédagogie. Nous avons donc choisi, comme condition didactique, de présenter des moments de décontextualisation tout au long de la séquence. Ces moments comportent notamment des activités conventionnelles. Même si de telles activités génèrent parfois des pilotages serrés conduisant à l'obtention de la réponse juste, la présentation d'activités qui ressemblent à celles réalisées en classe semble essentielle pour aider les élèves à établir la liaison entre ce qui est travaillé dans chacune des institutions.

Si certaines conditions d'ordre général ont été retenues pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques, des conditions spécifiques au savoir visé, en l'occurrence l'équivalence des fractions, ont également été identifiées. De nombreuses études se sont intéressées à l'apprentissage et à l'enseignement de la fraction. L'originalité de notre recherche est qu'elle porte sur la coordination des interprétations de la fraction à partir d'un ensemble de

situations. En effet, quatre situations, prenant chacune appui sur une interprétation différente de la fraction, ont été expérimentées. La variété des situations présentées permet, comme prévu, d'élargir le caractère d'utilité des connaissances. Ainsi, différents sens que peut prendre la notion d'équivalence sont construits par les élèves. Cependant, nos résultats montrent que les élèves n'utilisent pas d'emblée une connaissance développée dans une situation lors de la présentation d'une nouvelle situation. Nous faisons l'hypothèse que cette difficulté s'explique essentiellement par le fait que l'équivalence des fractions prend un sens bien différent selon l'interprétation convoquée. Pour favoriser non seulement l'intégration des différentes interprétations mais aussi leur coordination, nous relevons ainsi l'intérêt de situations sollicitant plus d'une interprétation, ce qui permettrait du coup de prendre appui sur les interprétations les mieux maîtrisées pour en développer d'autres.

Enfin, bien que la recherche vise l'étude des conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique, elle a également comme intérêt de proposer une séquence d'enseignement sur l'équivalence des fractions. En raison du défi important que représentent l'apprentissage et l'enseignement de la structure multiplicative de la fraction, et plus particulièrement encore de la prise en compte de relations multiplicatives dans la comparaison de fractions, il n'est pas étonnant que des techniques permettant de contrecarrer cette complexité soient recherchées tant par les élèves que par les enseignants. La séquence élaborée est une proposition alternative à cette recherche de techniques, d'algorithmes. Elle permet de travailler l'équivalence des fractions en articulation avec l'appropriation de la structure multiplicative de la fraction et favorise, de plus, l'engagement et l'activité mathématique des élèves. Bien que cette séquence ait été pensée pour le contexte orthopédagogique, elle serait également appropriée, selon nous, pour un enseignement en groupe-classe.

9.3 Limites méthodologiques

Nous appuyant sur l'ingénierie didactique (Artigue, 1988, 1996, 2002), la méthodologie a consisté, entre autres, à confronter les analyses *a priori* et les analyses *a posteriori* des conduites d'élèves. La ventilation des conduites en catégories, dans l'analyse *a priori*, donne

des repères, d'une part, pour choisir les variables didactiques et leur valeur et, d'autre part, pour observer l'évolution des conduites des élèves lors de l'analyse *a posteriori*. Cependant, les catégories de conduites ne sont pas toujours assez fines pour identifier ce qui est réellement engagé par les élèves. Certaines catégories de conduites ne s'excluent pas nécessairement. Par exemple, dans la première situation, pour identifier le nombre de pièces dont l'aire correspond à $1/b$ d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure, il peut y avoir coordination entre l'établissement des relations multiplicatives d'un point de vue numérique entre $1/b$ et c/d (conduite C) et la partition mentale de la figure (conduite B). Notons également qu'il est parfois difficile d'identifier le raisonnement sur lequel reposent les propositions des élèves, car les connaissances en acte et les connaissances formulées ne sont pas les mêmes. Autrement dit, il y a parfois un écart entre ce que les élèves font et ce qu'ils formulent à propos de ce qu'ils font. Par exemple, lors de la quatrième situation, il peut être difficile de juger si les élèves mettent en œuvre une stratégie multiplicative ou additive pour établir la relation entre le numérateur et le dénominateur en raison de la difficulté des élèves à exprimer verbalement une relation fractionnaire non entière. Enfin, bien que les catégories de conduites puissent être raffinées, il n'en demeure pas moins que l'analyse d'une production d'élève ne permet pas de fixer sans l'ombre d'un doute les connaissances qu'elle sous-tend. Elle ne peut être qu'hypothèse puisque nous n'avons jamais accès à la connaissance de l'élève. Concernant l'intervention, on peut s'interroger sur la nécessité de savoir précisément, à chaque moment, ce qui fonde les conduites des élèves pour les faire progresser. Les conditions didactiques sur lesquelles s'appuie l'intervention conduisent d'ailleurs à ne pas questionner chacun des élèves lorsqu'il formule une réponse, de façon à conserver un va-et-vient rapide entre les actions des élèves et la rétroaction du milieu. Cependant, sur le plan méthodologique, il s'agit certes d'une limite, car il peut y avoir des différences entre la conduite adoptée par un élève et celle identifiée par le chercheur.

Nous relevons également quelques limites concernant les données complémentaires qui ont été recueillies pour analyser l'évolution des connaissances des élèves. En plus d'examiner finement les conduites adoptées par les élèves tout au long de la séquence, nous avons administré un prétest et un posttest. Les résultats dévoilent une amélioration pour 22 des 29 items du questionnaire et une amélioration chez huit des neuf élèves suivis. Rappelons cependant que le prétest, qui a aussi servi à la sélection des élèves, a été soumis à l'ensemble

des élèves des trois classes et a donc été réalisé en classe. Le posttest, en revanche, a été effectué seulement par les neuf élèves sélectionnés et a, par conséquent, été réalisé à l'extérieur de la classe, en présence de l'expérimentatrice. Il est donc possible que les meilleures performances obtenues au posttest reposent en partie sur le contexte de passation. Nous aurions souhaité, par ailleurs, confronter les performances des élèves réalisées en classe à celles réalisées en contexte orthopédagogique. Cependant, dans les trois classes d'où proviennent les élèves, la fraction n'a pas été traitée au moment de l'expérimentation. Étant donné que celle-ci a eu lieu en fin d'année scolaire, nous avons donc tenté d'avoir accès aux examens du Ministère de nos élèves, ce qui n'a malheureusement pas été possible. Ainsi, aucune donnée recueillie ne permet d'observer si les élèves sont en mesure d'utiliser en classe les connaissances sur la fraction contrôlées en contexte orthopédagogique.

Enfin, la recherche étant exploratoire, elle n'identifie pas avec certitude et de façon exhaustive les conditions didactiques à respecter pour penser l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. En effet, bien que les résultats suggèrent, globalement, que les conditions didactiques retenues sont favorables à l'apprentissage, la séquence élaborée pour les mettre à l'épreuve a été expérimentée auprès de seulement trois groupes d'élèves. De plus, même si les conditions didactiques ont été soigneusement choisies en s'appuyant sur les écrits scientifiques liés à notre objet de recherche, d'autres conditions pourraient être retenues et s'avérer pertinentes. La recherche montre cependant le potentiel d'un appui sur la thèse didactique pour penser l'intervention orthopédagogique en mathématiques et offre des balises pour la construction et le pilotage des situations. Elle ouvre ainsi la porte à d'autres recherches souhaitant investiguer les conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique en mathématiques.

9.4 Quelques perspectives de recherches

Plusieurs recherches pourraient être engagées en prolongement de l'étude actuelle. Notre recherche, en explorant l'effet d'un ensemble de conditions didactiques, a fait émerger de nouvelles questions à partir desquelles nous formulons quelques hypothèses à investiguer.

Nos résultats montrent l'efficacité de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique, ce qui s'accompagne, en contrepartie, de difficultés à se détacher des situations. Pour favoriser la décontextualisation des connaissances, nous avons choisi d'assurer une variété de situations mathématiques de manière à élargir le caractère d'utilité des connaissances. Cependant, il y a lieu de s'interroger sur les conditions susceptibles d'aider les élèves à établir des relations entre différentes situations par le biais des connaissances. Nous avons choisi, dans notre recherche, de présenter quatre situations, les unes après les autres. Une avenue à explorer serait, au terme de la séquence d'enseignement, d'ajouter une série de problèmes en s'appuyant sur les différentes situations présentées, ou encore de privilégier une alternance entre différentes situations, autrement dit des allers-retours d'une situation à l'autre. De plus, pour aider les élèves à accorder le statut de savoir aux connaissances développées en situation, des recherches pourraient étudier l'effet, en contexte orthopédagogique, de bilans de savoirs (Butlen et Pézard, 2003). Ainsi, au terme de chaque situation, pourrait être consacré un moment dans lequel les élèves discutent de ce qui est important à retenir et rédigent ensuite un texte, avec l'aide de l'orthopédagogue si nécessaire. Le cahier des élèves pourrait prendre différentes formes. Par exemple, il pourrait être composé de photos prises pendant que les élèves réalisent les activités. L'orthopédagogue suggérerait alors à l'enseignant de la classe (ou aux parents) de questionner les élèves sur ce qu'ils ont fait et appris en contexte orthopédagogique à partir des photos, visant ainsi à favoriser la décontextualisation des connaissances. De plus, cela permettrait à l'enseignant (ou aux parents) d'avoir connaissance des interventions réalisées en orthopédagogie.

Une des particularités du contexte orthopédagogique est que l'enseignant et l'orthopédagogue enseignent tous deux des contenus mathématiques et/ou relatifs au français aux mêmes élèves, et ce, durant la même période de temps. La contrainte d'un enseignement réalisé dans deux institutions parallèles demeure un problème didactique encore ouvert. Généralement, l'orthopédagogue travaille une notion qui a été enseignée auparavant par l'enseignant de la classe, mais dont l'enseignement a échoué. Comment intervenir auprès d'élèves possédant des connaissances qui ne sont pas opérationnelles alors que l'orthopédagogue n'a pas (ou a peu) accès à la mémoire didactique de la classe ? La collaboration entre l'orthopédagogue et l'enseignant favoriserait sans aucun doute

l'interprétation des conduites des élèves et permettrait, de plus, de rappeler des situations vécues dans l'autre institution. Cependant, il y a lieu de s'interroger plus finement sur les mesures à mettre en place pour assurer une certaine liaison entre les deux institutions, d'autant plus que le contenu abordé en orthopédagogie met généralement en valeur un contrat dépassé plutôt que le savoir en cours d'enseignement dans la classe. Nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que traiter simultanément un même contenu en classe et en contexte orthopédagogique favoriserait l'arrimage entre les deux institutions. Le contenu abordé en contexte orthopédagogique pourrait alors être réinvesti en classe dans de nouvelles situations, ce qui favoriserait du coup la décontextualisation des connaissances.

Dans notre recherche, nous avons identifié des conditions didactiques favorables à l'intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Il serait intéressant, sur la base de nos résultats, d'explorer d'autres contenus mathématiques et, aussi, d'étudier l'effet de nos conditions sur d'autres publics d'élèves. Les conditions didactiques que nous avons identifiées sont-elles pertinentes, par exemple, pour travailler auprès d'élèves du début primaire, d'élèves ayant un trouble du comportement ou d'élèves ayant un trouble du langage ? Comment adapter notre séquence pour travailler auprès d'élèves malvoyants ou malentendants ? De plus, l'expérimentation a été réalisée auprès de groupes de trois élèves, mais les conditions retenues résisteraient-elles à une intervention réalisée en individuel ? Bien que l'intervention individualisée soit généralement considérée comme favorable à l'apprentissage (c'est notamment le cas dans le modèle Ràl⁹⁸), notre recherche conduit au contraire à considérer les défis que cela représenterait pour la dévolution des situations. On peut d'ailleurs s'interroger sur l'intérêt d'un enseignement individualisé en mathématiques, qui, de plus, permet d'aider un moins grand nombre d'élèves. Or, certains contextes nécessitant une intervention d'aide individualisée, des recherches pourraient porter sur les conditions didactiques à mettre en place pour compenser l'absence des interactions entre

⁹⁸ La réponse à l'intervention (Ràl) est un modèle conçu aux États-Unis et repris par des chercheurs québécois, notamment par Brodeur et coll. (2008), qui vise à identifier le plus tôt possible les élèves en difficulté afin de leur fournir des interventions adaptées à leurs besoins. Fuchs et Fuchs (2007) définissent trois niveaux d'intensité pédagogique : 1) intervention universelle réalisée en classe par l'enseignant; 2) intervention supplémentaire réalisée en sous-groupe d'élèves par l'enseignant ou une personne-ressource telle que l'orthopédagogue; 3) intervention ciblée et intensive réalisée en petit sous-groupe ou en individuel par une personne-ressource et construite sur mesure pour répondre aux besoins spécifiques des élèves.

élèves, qui sont fort utiles pour l'appropriation des savoirs mathématiques. Nous faisons l'hypothèse, sur la base des entretiens individuels réalisés avant la séquence, que proposer des contre-suggestions, comme le propose l'entretien critique de Piaget, pourrait être pertinent pour relancer l'élève.

Par ailleurs, il serait intéressant, en prolongement de notre étude, de mener des recherches en collaboration avec les orthopédagogues afin d'analyser comment ils s'approprient les conditions didactiques que nous avons identifiées, ce qui permettrait, du coup, de mettre à nouveau à l'épreuve nos conditions et de les préciser. De telles recherches apparaissent essentielles, d'autant plus que, selon Salin (2007b), les difficultés des enseignants à s'approprier les situations basées sur la TSD les conduiraient à en présenter peu. Le pilotage des situations, tel que nous le proposons, représente un défi important, car il exige une bonne maîtrise des situations pour adapter judicieusement, sur le vif, les stratégies d'enseignement aux contraintes non prévues de la situation. Il oblige également les orthopédagogues à rompre avec certaines méthodes d'enseignement très répandues actuellement. Nous pensons notamment à l'enseignement explicite qui, selon la recension des études réalisée par Bissonnette et coll. (2010), serait considéré dans plusieurs recherches comme étant efficace pour favoriser l'apprentissage d'élèves en difficulté. De plus, la prégnance des sciences cognitives dans la noosphère scolaire conduit à s'intéresser aux spécificités de l'élève pour penser à une intervention adaptée à ses besoins. Le pilotage des situations, selon les conditions didactiques que nous proposons, s'inscrit dans une toute autre perspective : il nécessite des questionnements relatifs à l'effet de la situation sur l'apprentissage. Mais comment amener les orthopédagogues à poser un regard didactique sur leurs interventions ? Il semble important de répondre à cette question pour assurer la liaison entre la théorie et la pratique.

Enfin, le caractère plus « intimiste » d'une séance orthopédagogique, comparativement à une séance de classe, ne peut que stimuler les interactions verbales et rendre plus visible la présence de l'orthopédagogue. Le point délicat est le contenu des interventions qui doit reposer sur une analyse didactique du savoir visé, des tâches présentées aux élèves et des stratégies qu'elles peuvent générer. Sans cet éclairage didactique, les interventions peuvent glisser vers un pilotage excessif visant l'utilisation par les élèves de la stratégie attendue.

Nous avons la conviction qu'un appui sur la thèse didactique est indispensable pour penser l'intervention auprès d'élèves qui éprouvent des difficultés en mathématiques, et nous espérons que notre thèse crée une impulsion pour la réalisation de recherches didactiques en contexte orthopédagogique. Nous souhaitons vivement, par ailleurs, que cette recherche et celles qui suivront aient des retombées sur le terrain de la rencontre avec les élèves afin que les orthopédagogues portent un regard véritablement didactique sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques.

ANNEXE A

Cours s'inscrivant dans la catégorie « stages » selon les universités

Universités	Sigles et titres des cours
UQAM (20)	ASM1400 : Stage 1, Insertion à la réalité scolaire au préscolaire-primaire et à l'enseignement en classe ordinaire (4) ASM2400 : Stage 2, Initiation à l'adaptation scolaire (AS) au préscolaire-primaire (5) ASM3400 : Stage 3, Différenciation pédagogique et collaboration en AS au préscolaire primaire (5) ASM4400 : Stage 4, Intégration à la vie professionnelle (6)
U de M (21)	EDU1110 : Stage 1 en AS au primaire et secondaire (3) EDU2003 : Stage 2 en AS au primaire (6) EDU3003 : Stage 3 en AS au primaire (6) EDU4003 : Stage 4 en AS au primaire (6)
U de S (24)	ASS210 : Initiation à la profession et validation (2) ASS521 : Intégration socioprofessionnelle au primaire 1 (3) ASS621 : Intégration socioprofessionnelle au primaire 2 (3) ASS411 : Immersion socioprofessionnelle au primaire (4) ASS811 : Insertion socioprofessionnelle au primaire (12)

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

ANNEXE B

Cours s'inscrivant dans la catégorie « projets d'intégration » selon les universités

Universités	Sigles et titres des cours
UQAM (10)	ASM1350 : Activité d'intro à la formation (3) ASM2501 : Séminaire d'intégration 1 (1) ASM4500 : Séminaire d'intégration 2 (2) ASM6401 : Activité de synthèse relative à l'ens. en AS (2) ASM2452 : Séminaire thématique spécialisé en AS 1 (1) ASM3452 : Séminaire thématique spécialisé en AS 2 (1)
U de M (9)	PED1001 : AS au primaire et secondaire (2) PED3001 : Enseigner en AS aux ÉHDAA (1) PED4300 : Atelier d'innovation en AS (3) PED4301 : Projet d'intégration en AS (3)
U de S (21)	ASI303 : Observation à la clinique (2) ASI703 : Soutien à l'évaluation à la clinique (1) ASI513 : Soutien personnalisé aux élèves à risque 1 (2) ASI613 : Soutien personnalisé aux élèves à risque 2 (2) ASI333 : Projet multidisciplinaire 1 (3) ASI433 : Projet multidisciplinaire 2 (3) ASI533 : Projet de collaboration 1 (2) ASI633 : Projet de collaboration 2 (2) ASI713 : Projet de développement professionnel (3) ASI731 : Thématique actuelle en AS au primaire (1)

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

ANNEXE C

**Cours s'inscrivant dans la catégorie « cours disciplinaires et didactiques »
selon les universités**

Universités	Disciplines	Sigles et titres des cours
UQAM (42)	Français (18)	DDL2075 : Did. du français 1 : volet lecture (3) DDL3075 : Did. du français 2 : volet écriture (3) LIN1075 : Fondements linguistiques et enseignement (3) ASS4850 : Ortho. de la lecture 1 (3) ASS5855 : Ortho. de l'écriture 1 (3) ASS6050 : Diff. d'app. en lecture-écriture au primaire (3)
	Mathématiques (15)	MAT1026 : Did. de l'arithmétique au primaire (3) MAT2027 : Did. de la géométrie et de la mesure au primaire (3) ASS5830 : Ortho. des maths 1 (3) ASS6030 : Ortho. des maths 2 (3) ASS6230 : Ortho. des maths 3 (3)
	Autres (9)	DID5410 : Did. de l'univers social au primaire (3) DID3510 : Did. de la science et de la technologie préscolaire- prim. (3) DID3291 : Did. de l'éthique et de la culture religieuse au prim. en AS (3)
U de M (39)	Français (15)	DID1010A : Français écrit pour les futurs enseignants (3) DID1217 : Did. du français- BEAS 1(3) DID2236 : Did. du français- BEAS 2 (3) DID3238 : Did. du français- BEAS 3 (3) DID4252 : Did. du français- élèves allophones (3)
	Mathématiques (12)	DID100I : Fondements de la did. des maths (3) DID1220 : Did. de l'arithmétique en AS (3) DID3280 : Did. des nombres rationnels en AS (3) DID4209 : Did. de la géométrie en AS au primaire (3)
	Autres (12)	DID1940 : Did. des arts en AS au primaire (3) DID3230 : Did. des Sciences humaines en AS au primaire (3) DID3220 : Did. des sciences en AS au primaire (3) DID3309 : Did. de l'éthique et de la culture religieuse (3)
U de S (32)	Français (13)	ASF120 : Plaisirs de communiquer à l'oral et à l'écrit (2) ASF220 : Fondements de la didactique de l'écrit (3) ASF311 : Did. du français au primaire (4) ASF511 : Orthodidactie du français (4)
	Mathématiques (13)	ASM110 : Activités et culture mathématiques (2) ASM130 : Did. de l'arithmétique 1 (3) ASM311 : Did. de l'arithmétique 2 (3) ASM411 : Did. de la statistique au primaire (2) ASM611 : Did. de la géométrie au primaire (3)
	Autres (6)	ASP401 : Univers social au primaire (2) ASP421 : Sciences et technologie au primaire (2) ASP701 : Éthique et culture religieuse au primaire (2)

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

ANNEXE D

**Cours s'inscrivant dans la catégorie « cours à caractère transversal »
selon les universités**

Universités	Sigles et titres des cours
UQAM (27)	ASC6805 : École et société (3) FPE3050 : Organisation de l'éducation au Québec (3) FPE4250 : Éducation, épistémologie et métacognition (3) ASS2063 : Intégration scolaire et modèles d'intervention (3) ASS4825 : Intervention précoce et prévention (3) ASS6815 : Intro. à la recherche auprès des populations vulnérables (3) ASS2065 : Gestion de classe et élèves en diff. au préscolaire-primaire (3) FPE4510 : Évaluation des app. au primaire (3) FPE3650 : Application des TIC en enseignement (3)
U de M (27)	ETA1001 : Histoire et philosophie de l'éducation (3) ETA1900 : Système éduc. et profession enseignante (3) PPA1111 : ÉHDAA et modèles de service (3) PPA1115 : App. Et modèles d'ens. en AS (3) PPA3110 : École, famille, conseil en AS (3) ETA3001 : Recherche appliquée en AS (3) PPA2110 : Gestion de classe et adaptation scolaire (3) ETA3550 : Évaluation des app. (3) PPA1114 : TIC et AS (3)
U de S (16)	ASP110 : Éducation, pédagogie et enseignement (2) ASP220 : Collaboration et éthique professionnelle (3) ASP230 : Gestion d'une communauté apprenante (3) ASP531 : Motivation et gestion au primaire (3) ASP240 : Évaluation des compétences et PI (3) ASP303 : Les TIC en enseignement (2)

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

ANNEXE E

Cours s'inscrivant dans la catégorie « cours à caractère psychologique » selon les universités

Universités	Sigles et titres des cours
UQAM (18)	KIN3000 : Éducation psychomotrice et AS (3) ASS1900 : Dév. socioaffectif et socialisation scolaire (3) ASS3800 : Enfants présentant des diff. particulières (3) ASS4815 : Stratégies d'ens. et incapacités intellectuelles (3) ASS1801 : Diff. d'ordre comportemental au primaire 1 (3) ASS4801 : Diff. d'ordre comportemental au primaire 2 (3)
U de M (15)	PPA1110 : Croissance de l'enfant et prévention (3) PPA2401 : Élèves en diff. d'app. au primaire (3) PPA4401 : Élève du prim. en diff. et milieu (3) PPA3470 : Élèves du prim. ayant incapacités intellect. (3) PPA3402 : Élèves en diff. de comportement au primaire (3)
U de S (18)	ASE120 : Dév. de l'enfance à l'ado 1 (3) ASE210 : Dév. de l'enfance à l'ado 2 (2) ASE130 : Neuropsychologie (3) ASP613 : L'apprenant adulte (2) ASE321 : Diff. comportementales au prim. 1 (2) ASE421 : Diff. comportementales au prim. 2 (2) ASE521 : Évaluation des diff. comportementales (2) ASE621 : Intervention d'ordre comportemental (2)

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

ANNEXE F

Cours s'inscrivant dans la catégorie « cours à option » selon les universités

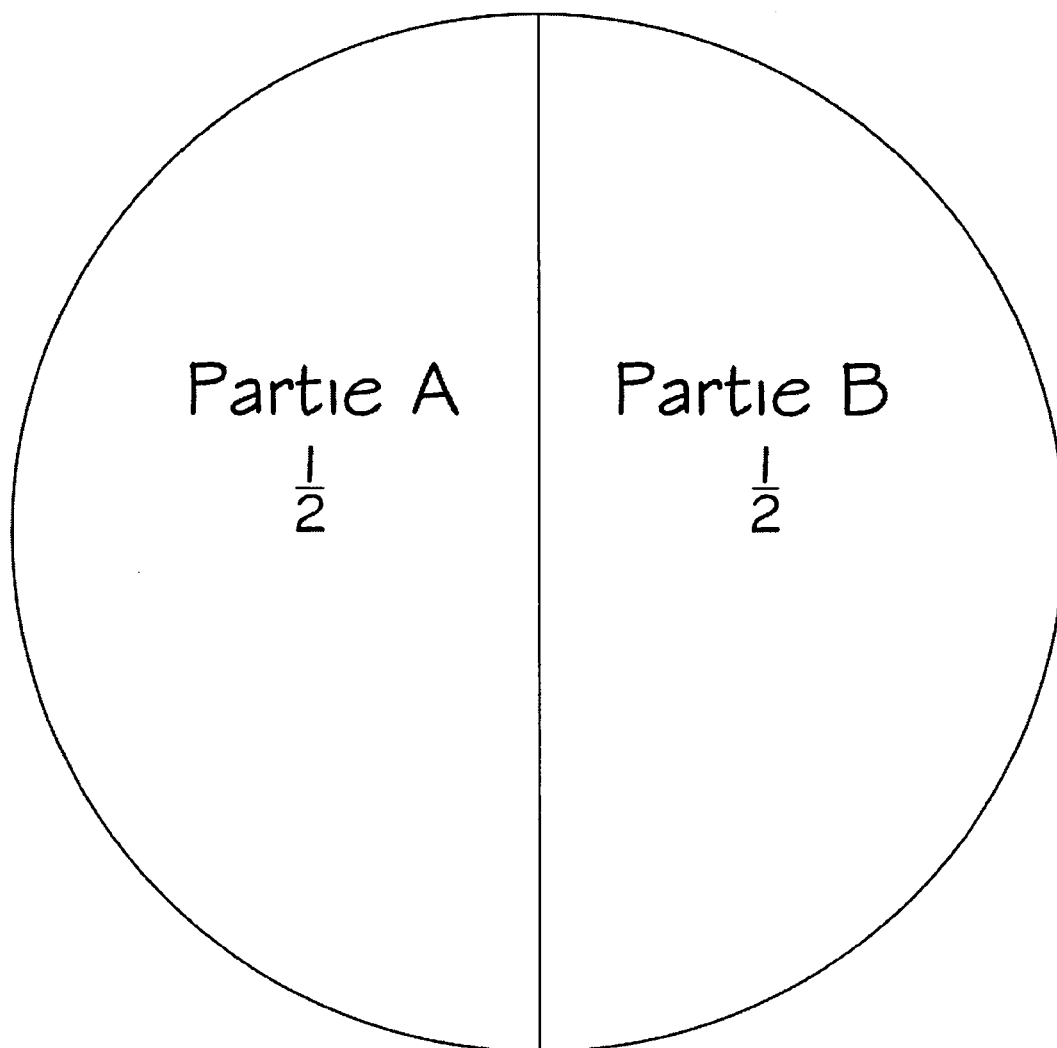
Universités	Sigle et titre des cours
UQAM (3)	<p>Les étudiants peuvent choisir un cours parmi les suivants, mais ils peuvent également choisir d'autres cours avec l'accord de la direction du programme.</p> <p>ASS2835 : Pédagogies différenciées (3) ASS4840 : Adaptation de l'enseignement et soutien à l'apprentissage (3) ASS5200 : Partenariat parents-enseignants-intervenants pour EHDAA (3) DID1210 : Didactique générale et modèles d'enseignement au primaire (3) FPT2831 : Laboratoire d'enseignement (3) KIN3001 : Évaluation et intervention en éducation psychomotrice (3) MAT1011 : L'activité mathématique (3) PSY3520 : Affectivité, motivation et apprentissage (3)</p>
U de M (9)	<p>Les étudiants doivent obligatoirement choisir trois cours parmi les quatre suivants.</p> <p>ETA2200 : École et environnement social (3) PPA3205 : La classe en milieu urbain (3) PPA4406 : Incapacités en pratiques d'intégration (3) PPA4407 : Élèves en diff. grave de comportement (3)</p>
U de S (9)	<p>Les étudiants doivent choisir un des domaines d'enrichissement suivants. Ils choisissent donc un « bloc » de trois cours.</p> <p>Bloc 1 : Orthopédagogie auprès d'élèves à risque AMF711 : Séminaire d'intégration français-mathématiques au primaire (1) ASF711 : Orthodidactie 2 du français au primaire (4) ASM711 : Soutien à l'apprentissage en mathématiques 1 (4)</p> <p>Bloc 2 : Troubles du comportement ASE711 : L'enseignant, didacticien et intervenant au primaire (1) ASE751 : Évaluation et intervention avancées (4) ASE761 : Analyse des programmes d'intervention (4)</p> <p>Bloc 3 : Handicaps et troubles envahissants du développement ASH711 : Les déficiences langagières et sensorielles au primaire (3) ASH721 : Les déficiences intellectuelles au primaire (3) ASH731 : Les troubles envahissants du développement au primaire (3)</p>

*Les nombres entre parenthèses représentent le nombre de crédits, sur 120.

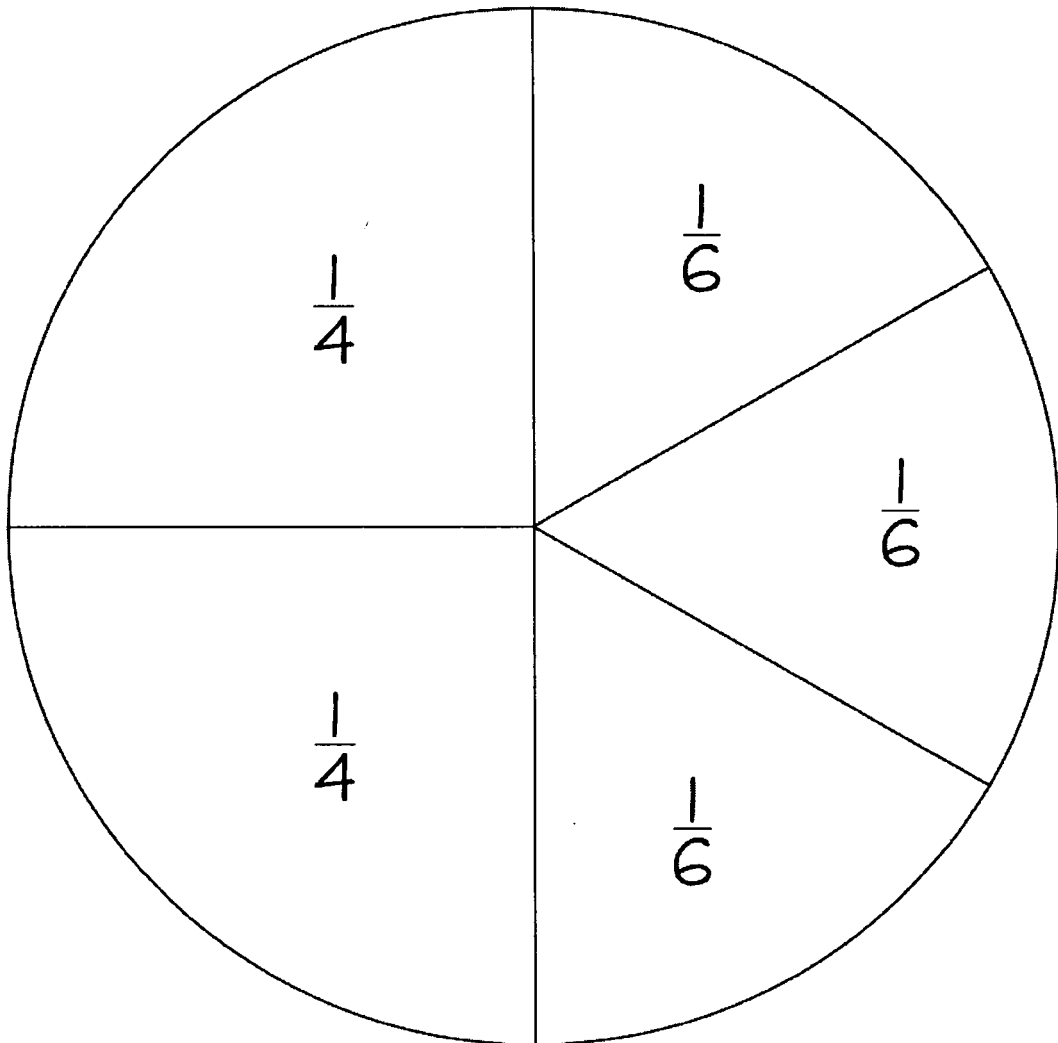
ANNEXE G

Matériel de la première situation

Scénario 1a

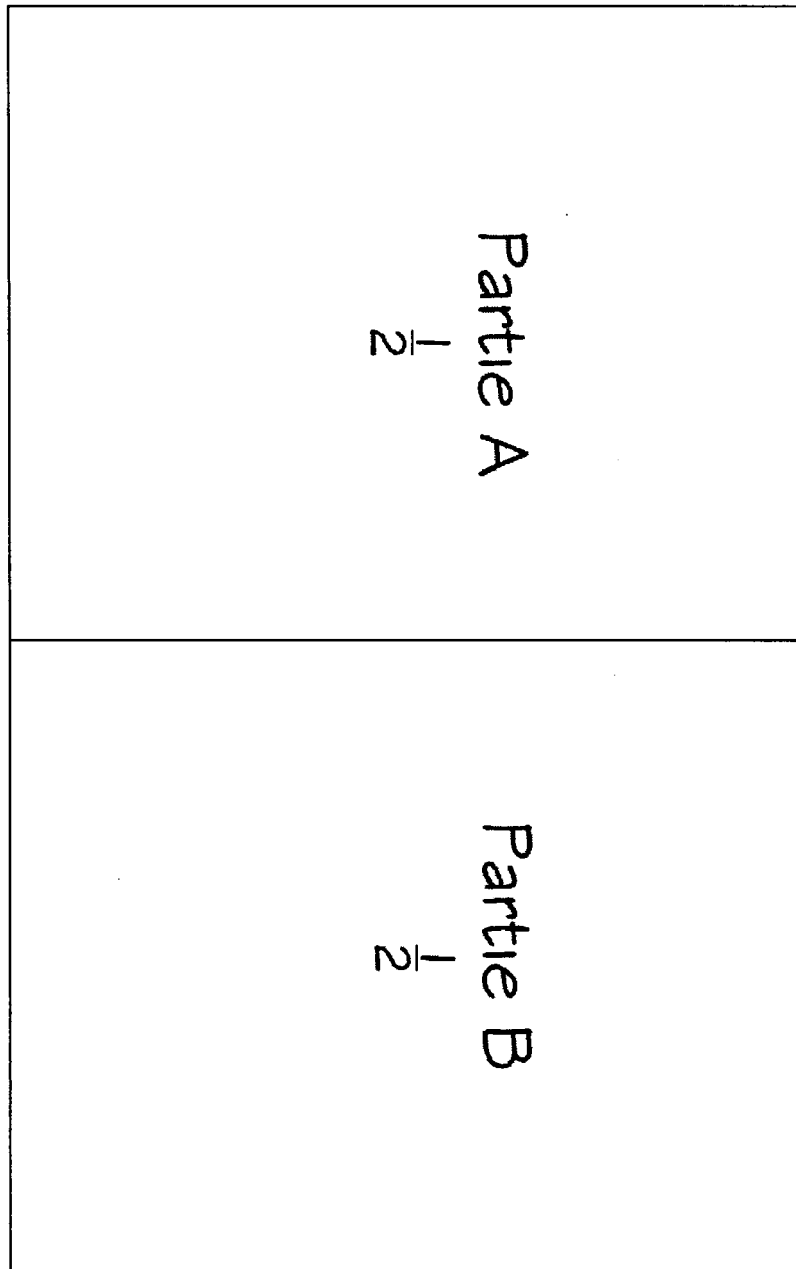
a) *Figure présentée aux élèves*

b) Pièces servant à la rétroaction



Scénario 1b

a) *Figure présentée aux élèves*



b) Pièces servant à la rétroaction

$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

Scénario 2

a) *Figure présentée aux élèves*

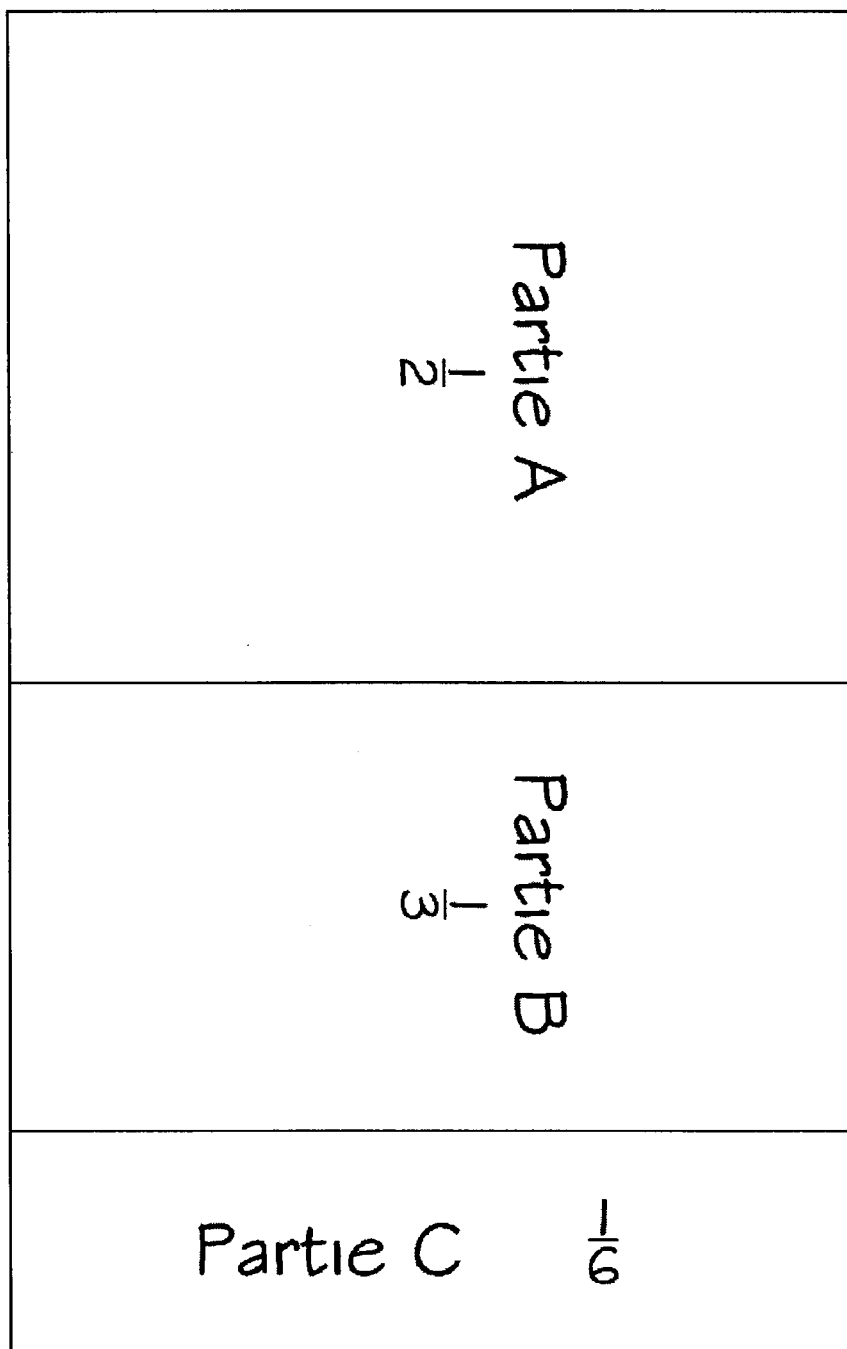
Partie A $\frac{1}{3}$	Partie B $\frac{1}{3}$	Partie C $\frac{1}{3}$
---------------------------	---------------------------	---------------------------

b) Pièces servant à la rétroaction

$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Scénario 3

a) Figure présentée aux élèves aux scénarios 3a et 3b



b) Pièces servant à la rétroaction du scénario 3a

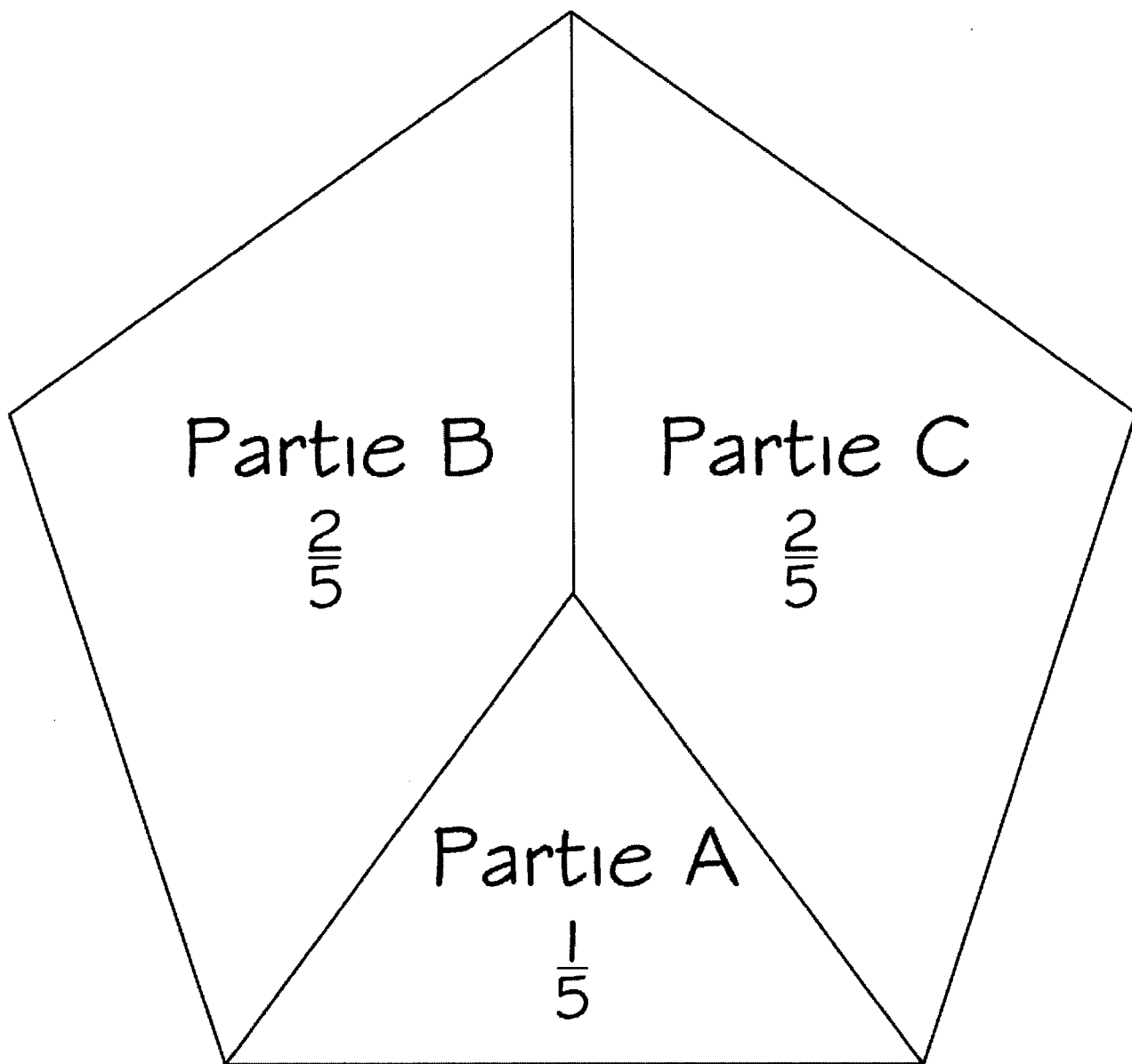
$4 -$	$4 -$
$9 -$	$9 -$
$12 -$	$12 -$

c) Pièces servant à la rétroaction du scénario 3b

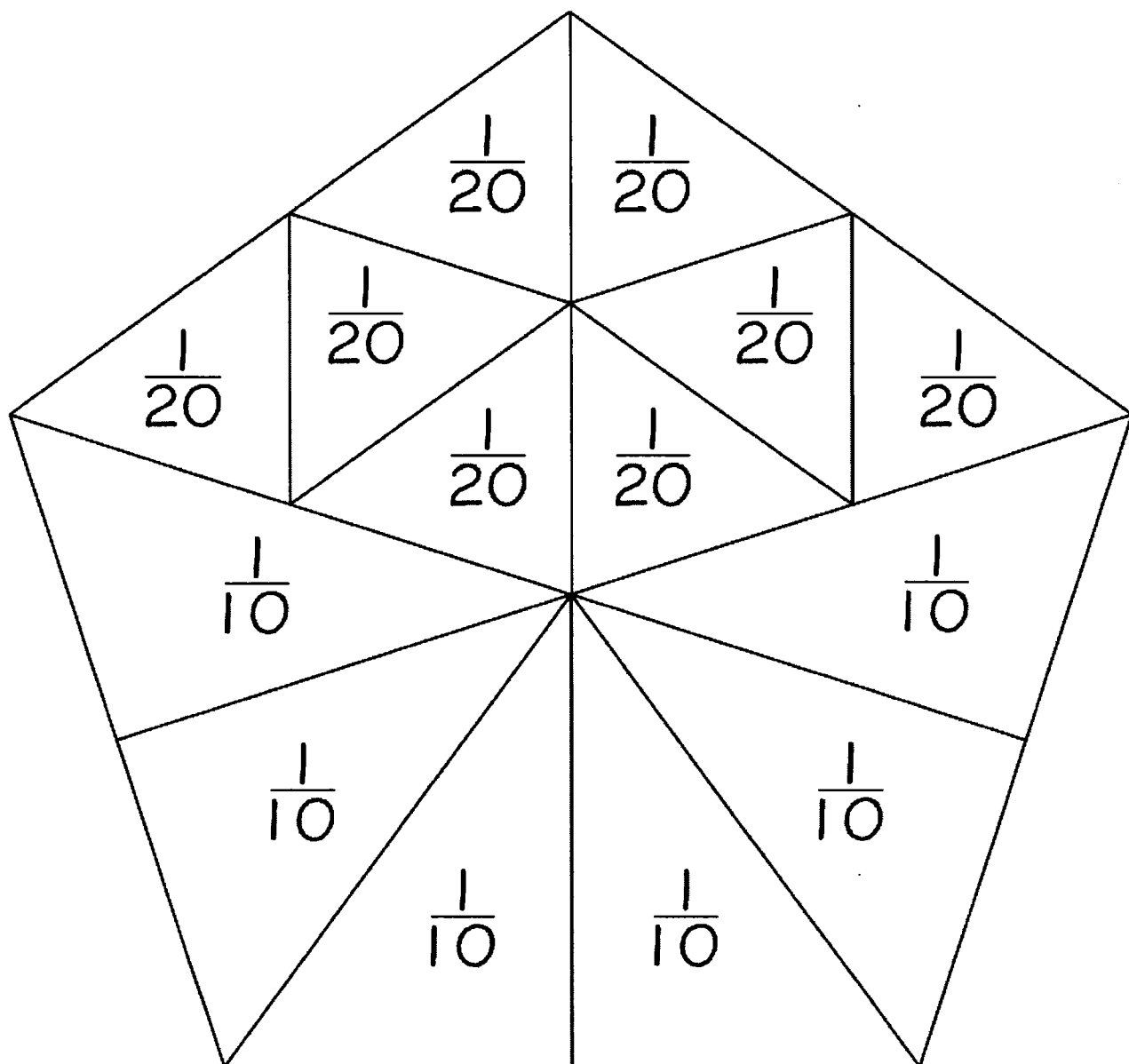
$\frac{9}{-}$	$\frac{9}{-}$	$\frac{9}{-}$
$\frac{6}{-}$	$\frac{6}{-}$	$\frac{6}{-}$
$\frac{8}{-}$	$\frac{8}{-}$	$\frac{8}{-}$

Scénario 4

a) Figure présentée aux élèves



b) Pièces servant à la rétroaction



Scénario 5

a) Figure présentée aux élèves au moment de la validation

Partie D	$\frac{1}{15}$
Partie C	$\frac{2}{5}$
Partie B	$\frac{1}{5}$
Partie A	$\frac{1}{3}$

b) Pièces servant à la rétroaction

	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
			$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

ANNEXE H**Prétest et posttest**

Nom : _____

1. Tu as exactement une minute pour compléter ces faits multiplicatifs.

$8 \times 2 =$

$9 \times 3 =$

$7 \times 4 =$

$5 \times 6 =$

$4 \times 0 =$

$3 \times 7 =$

$4 \times 8 =$

$9 \times 9 =$

$8 \times 5 =$

$6 \times 9 =$

$4 \times 10 =$

$2 \times 4 =$

$0 \times 1 =$

$8 \times 8 =$

$6 \times 6 =$

$5 \times 7 =$

$4 \times 3 =$

$1 \times 6 =$

$8 \times 7 =$

$7 \times 6 =$

2. Encerle la fraction la plus grande de chaque paire.

a) $\frac{8}{7}$ $\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{9}$

d) $\frac{6}{7}$ $\frac{6}{10}$

e) $\frac{4}{5}$ $\frac{16}{17}$

f) $\frac{15}{8}$ $\frac{13}{8}$

g) $\frac{3}{15}$ $\frac{15}{3}$

h) $\frac{11}{7}$ $\frac{11}{9}$

3. Les fractions équivalentes

a) Encerle les fractions équivalentes à $\frac{1}{3}$.

$\frac{3}{9}$

$\frac{7}{9}$

$\frac{4}{12}$

$\frac{3}{5}$

b) Encerle les fractions équivalentes à $\frac{2}{5}$.

$\frac{6}{15}$

$\frac{4}{10}$

$\frac{3}{6}$

$\frac{7}{10}$

c) Encerle les nombres égaux à $\frac{4}{2}$.

$\frac{2}{4}$

2

$\frac{10}{5}$

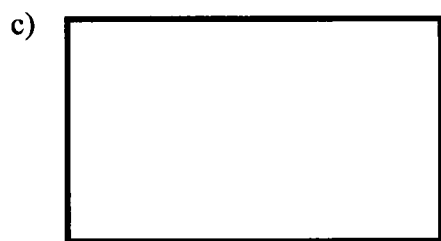
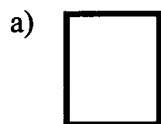
$\frac{8}{4}$

$\frac{8}{6}$

4. Le morceau ci-dessous représente les $\frac{2}{3}$ d'un gâteau. Trouve, parmi les illustrations a), b) et c), celle qui représente un gâteau complet, entier. Encerle-la.



Morceau de $\frac{2}{3}$ d'un gâteau



5. La ficelle ci-dessous représente les $\frac{2}{3}$ d'une ficelle entière. Trouve, parmi les illustrations a), b) et c), celle qui représente la ficelle entière, complète. Encerle-la.



$\frac{2}{3}$ d'une ficelle

a)



b)



c)



6. Le $\frac{1}{3}$ d'une ficelle mesure 6 cm. Quelle est la longueur de la ficelle entière ?

7.

a) Combien y a-t-il de $\frac{1}{8}$ dans 1 ? _____

b) Combien y a-t-il de $\frac{2}{8}$ dans 1 ? _____

c) Combien y a-t-il de $\frac{1}{5}$ dans 4 ? _____

d) Combien y a-t-il de $\frac{1}{12}$ dans $\frac{1}{3}$? _____

e) Combien y a-t-il de $\frac{2}{3}$ dans 2 ? _____

8. Résous ces problèmes.

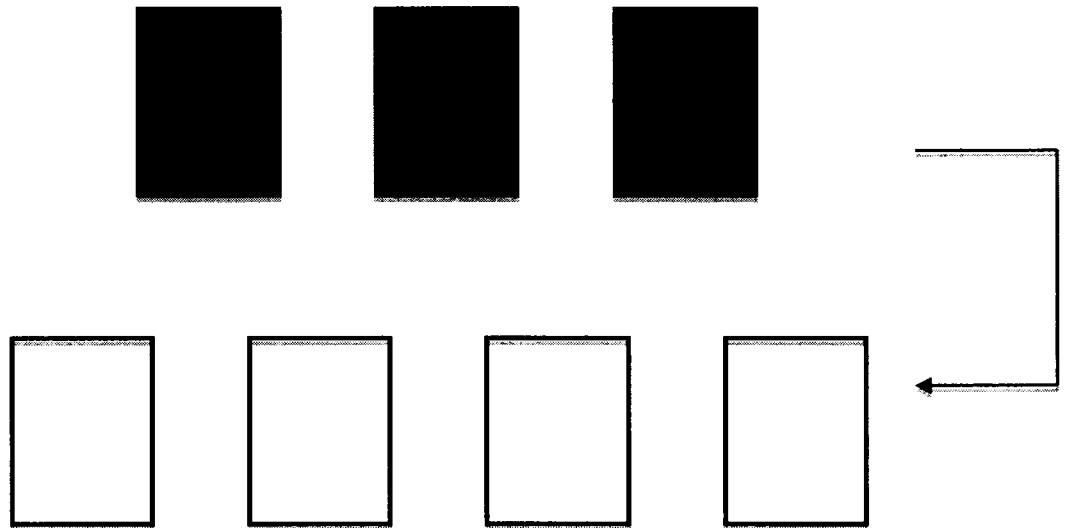
a) Il y a 6 enfants à une fête. On donne à chacun des enfants $\frac{1}{3}$ barre de granola. Combien de barres de granola entières donne-t-on ?

b) Chaque jour, je marche $\frac{1}{6}$ km. Combien de jours cela me prendra pour marcher 1 km ?

c) On a 2 longues réglisses. On donne $\frac{1}{4}$ de réglisse à chaque enfant. À combien d'enfants peut-on donner de la réglisse ?

d) Combien de petits contenants de $\frac{1}{6}$ de litre faut-il pour remplir un contenant de $\frac{2}{3}$ de litre ?

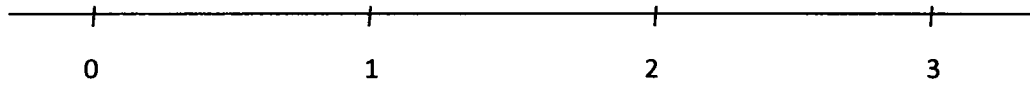
- e) Il y a 3 pots pleins de jus dans le réfrigérateur. Je les transvide dans 4 pots de manière à ce que chacun ait la même quantité de jus. Quelle fraction de chaque pot est remplie de jus ?



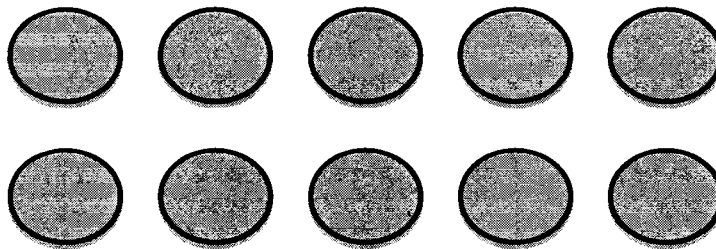
Indique par une marque sur chaque pot blanc la quantité de jus qu'il y aura.

Écris la fraction d'un pot que cette quantité représente : _____

9. Sur la droite ci-dessous, situe la fraction $\frac{2}{3}$.



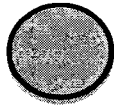
10. Noircis $\frac{1}{5}$ des jetons.



11. Noircis $\frac{4}{10}$ des jetons.

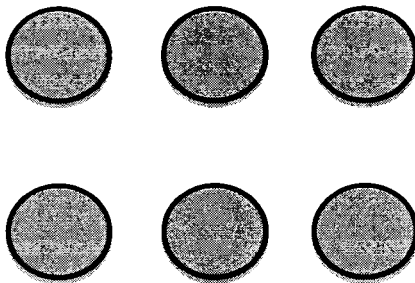


12.



Ceci représente $\frac{1}{5}$ d'une collection de jetons. Combien de jetons y a-t-il dans la collection complète ? _____

13.

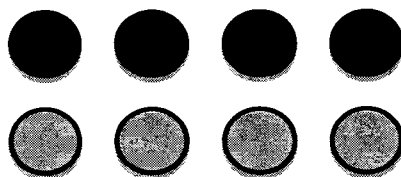


Ceci représente $\frac{3}{5}$ d'une collection de jetons. Combien de jetons y a-t-il dans la collection complète ? _____

14. Émilie a 4 \$. Ce montant correspond aux $\frac{2}{3}$ du montant d'argent que possède son frère. Combien d'argent son frère possède-t-il ? _____

15. Encerle toutes les représentations de $\frac{1}{4}$.

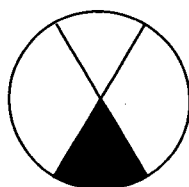
a)



b)



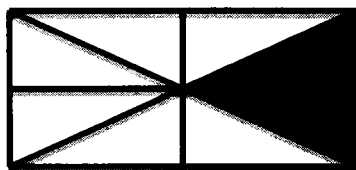
c)



d)



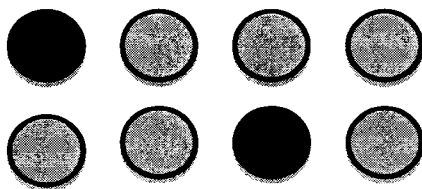
e)



f)



g)



16. Léo doit piger une bille dans l'un des sacs suivants.

Dans le sac A, il y a 5 billes bleues et 6 billes rouges.

Dans le sac B, il y a 5 billes bleues et 9 billes rouges.

Dans le sac C, il y a 8 billes bleues et 9 billes rouges.

Dans le sac D, il y a 8 billes bleues et 12 billes rouges.

a) Dans quel sac Léo doit-il piger pour avoir le plus de chances de tirer une bille bleue ? Pourquoi ?

b) Dans quel sac Léo doit-il piger pour avoir le plus de chances de tirer une bille rouge ? Pourquoi ?

ANNEXE I

Protocole d'entretien

1) Codes oraux et écrits des fractions

Demander à l'élève d'écrire :

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{8}{7}$

2) Faits multiplicatifs

Observer les stratégies que l'élève utilise pour trouver le produit des calculs suivants.

2×7 : Est-ce que l'élève fait $7 + 7$?

4×5 : Est-ce que l'élève utilise le comptage par intervalle de 5 ?

8×2 : Si l'élève s'appuie sur l'addition répétée, fait-il $8 + 8$ ou $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (commutativité) ?

10×3 : Est-ce que l'élève procède par rappel direct ? Compte-t-il par intervalle de 10 ?

9×3 : Si l'élève ne connaît pas le résultat, demander s'il peut s'appuyer sur le résultat précédent (10×3).

6×8 : Si l'élève a réussi tous les faits multiplicatifs précédents, ajouter ce calcul et observer comment il procède pour identifier le produit.

3) Les bandes de papier

Anticiper le résultat d'un pliage

- L'expérimentatrice prend une bande de papier et demande à l'élève : « Si je plie la bande en 2 et ensuite en 3 parties (elle effectue le pliage), combien y aura-t-il de parties selon toi ? » L'élève anticipe le résultat et le dépliage de la bande assure la validation.
- L'expérimentatrice prend une nouvelle bande et demande à l'élève : « Si je plie cette bande en 3 et ensuite, je la plie à nouveau en 3 (elle effectue le pliage), combien y aura-t-il de parties selon toi ? » L'élève anticipe le résultat et le dépliage de la bande assure la validation.

Réaliser un pliage

- L'expérimentatrice remet une bande à l'élève et lui demande s'il peut la plier en 8 parties égales. *En cas de difficulté, elle lui demande de plier la bande en 4 parties égales.*
- L'expérimentatrice remet une nouvelle bande à l'élève et lui demande s'il peut la plier en 12 parties égales. *En cas de difficulté, elle lui demande de plier la bande en 6 parties égales.*

4) Problèmes s'appuyant sur l'équation $n \times a/b = x$

La construction des problèmes présentés à la tâche 4 s'appuient sur les variantes suivantes :

- 1) la valeur recherchée (n , a/b ou x);
- 2) les valeurs numériques ($a = 1$ ou $a \neq 1$, n est multiple de a ou non, $a < b$ ou $a > b$);
- 3) la structure du problème (problème de proportionnalité ou problème scalaire);
- 4) le contexte impliqué (gâteaux, litres d'eau, jetons ou longueur de segments).

Nous présentons d'abord les problèmes soumis aux élèves. Un tableau identifiant la valeur des variables de chacun des problèmes est ensuite exposé.

4.1 Les gâteaux

- a) J'ai un morceau de gâteau qui correspond à $\frac{1}{8}$ d'un gâteau. Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ j'ai besoin pour avoir un gâteau complet ?

Si l'élève ne comprend pas, l'expérimentatrice dessine un rectangle et dit à l'élève : « Ceci correspond à $\frac{1}{8}$ d'un gâteau (la fraction $\frac{1}{8}$ est écrit à l'intérieur du rectangle). Combien il me faut de ce morceau pour avoir un gâteau complet ? »

- b) Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ d'un gâteau faut-il pour avoir 2 gâteaux complets ?
- c) Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ d'un gâteau faut-il pour avoir 5 gâteaux complets ?
- d) Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ d'un gâteau faut-il pour avoir $\frac{1}{2}$ gâteau ?
- e) Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ d'un gâteau faut-il pour avoir le $\frac{1}{4}$ d'un gâteau ?
- f) Combien de morceaux de $\frac{1}{8}$ d'un gâteau faut-il pour avoir les $\frac{3}{4}$ d'un gâteau ?

4.2 Les litres

- a) Si un pot contient 1 litre d'eau et que je transvide l'eau dans ces 5 verres pour qu'il y en ait autant dans chacun des 5 verres (en prenant appui sur un dessin), quelle fraction du litre d'eau se trouve dans chacun des verres ?

En cas de difficulté, l'expérimentatrice modifie 5 verres pour 2 verres et revient ensuite avec 5 verres.

- b) Si un pot contient 3 litres d'eau et que je transvide l'eau dans ces 4 verres pour qu'il y en ait autant dans chacun des 4 verres (en prenant appui sur un dessin), combien y aura-t-il de litre(s) d'eau par verre ?

En cas de difficulté, l'expérimentatrice modifie 4 verres pour 6 verres.

- c) Si je transvide 9 verres contenant chacun $\frac{1}{3}$ de litre d'eau dans un pot, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau dans le pot ?

En cas de difficulté, l'expérimentatrice modifie 9 verres pour 3 verres.

- d) Si je transvide 3 verres contenant chacun $\frac{2}{3}$ de litre d'eau dans un pot, combien y aura-t-il de litre(s) d'eau dans le pot ?

N.B. : Si le mot « litre » cause difficulté, l'expérimentatrice reformule le problème en modifiant le contexte. Par exemple, le problème b) pourrait être reformulé ainsi : « Si un pot d'eau contient 3 verres remplis d'eau et que je les distribue également dans 4 verres, quelle fraction de chaque verre sera remplie ? » (Tous les verres ont la même grandeur.)

4.3 Les jetons

- a) J'ai 8 jetons. Tu as le $\frac{1}{4}$ de mes jetons. Combien as-tu de jetons ?
- b) J'ai 10 jetons. Tu as les $\frac{3}{5}$ de mes jetons. Combien as-tu de jetons ?
- c) J'ai 4 jetons, ces 4 jetons représentent le $\frac{1}{3}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?
- d) J'ai 5 jetons, ces 5 jetons représentent les $\frac{5}{6}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?
- e) J'ai 6 jetons, ces 6 jetons représentent les $\frac{2}{3}$ de tes jetons à toi, combien as-tu de jetons ?
- f) Problème écrit : J'ai 9 jetons. J'ai les $\frac{3}{4}$ de tes jetons. Combien as-tu de jetons ?

4.4 Les segments

- a) Le segment B mesure les $\frac{3}{4}$ du segment A (8 cm). Dessine le segment B.
- b) Le segment A (3 cm) mesure le $\frac{1}{4}$ du segment B. Dessine le segment B.
- c) Le segment A (8 cm) mesure les $\frac{8}{5}$ du segment B. Dessine le segment B.
- d) Le segment B mesure les $\frac{4}{3}$ du segment A (6 cm). Dessine le segment B.
- e) Le segment A mesure 15 cm. Il mesure les $\frac{3}{5}$ du segment B. Combien mesure le segment B ?

Le tableau ci-dessous présente les valeurs des variables pour chacun des problèmes de la tâche 4.

Contexte	Tâche	Structure du problème	n	a/b	x
1. Gâteaux : tout qui peut à la fois être dénombré (comme un tout discret) et partitionné (comme un tout continu)	2 a	Proportionnalité	On cherche 8	1/8	1
	2 b	Proportionnalité	On cherche 16	1/8	2
	2 c	Proportionnalité	On cherche 40	1/8	5
	2 d	Proportionnalité	On cherche 4	1/8	1/2
	2 e	Proportionnalité	On cherche 2	1/8	1/4
	2 f	Proportionnalité	On cherche 6	1/8	3/4
2. Litres d'eau : unité de mesure de volume permettant de quantifier des quantités continues	3 a	Proportionnalité	5	On cherche 1/5	1
	3 b	Proportionnalité	4	On cherche 3/4	3
	3 c	Proportionnalité	9	1/3	On cherche 3
	3 d	Proportionnalité	3	2/3	On cherche 2
3. Jetons: tout discret dont l'unité n'est pas divisible	4 a	Scalaire	8	1/4	On cherche 2
	4 b	Scalaire	On cherche 6	3/5	10
	4 c	Scalaire	On cherche 12	1/3	4
	4 d	Scalaire	On cherche 6	5/6	5
	4 e	Scalaire	On cherche 9	2/3	6
	4 f	Scalaire	On cherche 12	3/4	9
4. Longueur de segments : quantité continue qui nécessite une unité de mesure de longueur ⁹⁹	5 a	Scalaire	8	3/4	On cherche 6
	5 b	Scalaire	On cherche 12	1/4	3
	5 c	Scalaire	On cherche 5	8/5	8
	5 d	Scalaire	6	4/3	On cherche 8
	5 e	Scalaire	On cherche 25	3/5	15

⁹⁹ Les problèmes sollicitant des mesures de segments (mesure de longueur) impliquent une seule dimension, tandis que les problèmes sollicitant des litres d'eau (mesure de volume) impliquent trois dimensions.

ANNEXE J

Formulaire de consentement



Chers parents, tuteurs,

Je sollicite la participation de votre enfant à un projet de recherche qui s'inscrit dans le cadre d'une thèse de doctorat. Mon expérience comme orthopédagogue m'a permis de constater que les orthopédagogues se sentent souvent démunis pour intervenir en mathématiques. Malheureusement, très peu d'écrits scientifiques portent sur le sujet. Mon projet vise donc à développer des outils pour l'intervention portant spécifiquement sur la fraction.

La direction d'école de votre enfant, _____, ainsi que son enseignant(e), _____, ont donné leur accord à ce projet. Un questionnaire sur la fraction sera d'abord complété par l'ensemble des élèves de la classe. Nous procéderons ensuite à un entretien individuel auprès de quelques élèves (deux périodes sont prévues pour mener à terme l'entretien) suivi d'un travail en groupes de trois élèves (neuf périodes sont prévues à cet effet). Les périodes durant lesquelles les élèves participeront à ces séances seront déterminées avec l'accord de l'enseignant(e). L'entretien individuel et le suivi en sous-groupe se réaliseront dans un local de l'école.

Les entretiens et les séances de travail seront filmés afin de procéder à leur analyse. Les renseignements recueillis auprès de votre enfant sont confidentiels et seule la chercheuse et son comité de direction de recherche auront accès à l'enregistrement vidéo. Tous les documents seront détruits au terme de la recherche.

La participation de votre enfant est volontaire. Cela signifie que même si vous consentez aujourd'hui à ce que votre enfant participe à cette recherche, il demeure entièrement libre de mettre fin à sa participation. Vous pouvez également retirer votre enfant du projet en tout temps, sans pénalité d'aucune forme, ni justification à donner.

Si vous souhaitez obtenir des informations supplémentaires sur le projet, vous pouvez me contacter au (450) 906-0665. Il me fera plaisir de répondre à vos questions.

Virginie Houle, doctorante

Université du Québec à Montréal

AUTORISATION PARENTALE

En tant que parent (ou tuteur) de _____, je reconnais avoir lu le présent formulaire de consentement et consens volontairement à ce que mon enfant participe à ce projet de recherche.

J'accepte qu'un questionnaire portant sur les fractions soit administré à mon enfant.

OUI

NON

Si mon enfant est sélectionné, j'accepte qu'il participe à un entretien individuel ainsi qu'à des séances de travail en sous-groupe sur le thème de la fraction (rappelons que les séances seront filmées et que seule la chercheuse et son comité de direction de recherche auront accès à l'enregistrement vidéo).

OUI

NON

Signature du parent (tuteur) : _____ Date : _____

Nom du parent en lettres moulées et coordonnées :

ANNEXE K

**Réponses des élèves à la question 1 du prétest
en fonction de leur classe d'appartenance**

Nombre de faits multiplicatifs réussies	OR1 (23 élèves)	OR2 (25 élèves)	AS (12 élèves)
20	10 (E2, E3)*	10 (E6)	0
19	4	4	0
18	4	4	0
17	0	2	0
16	2	1	0
15	2	2 (E5)	1
14	1 (E1)	0	0
13	0	1	0
8	0	0	1
7	0	1 (E4)	1
6	0	0	1 (E8)
4	0	0	2 (E9)
2	0	0	3 (E7)
1	0	0	2
0	0	0	1

* Le résultat des élèves sélectionnés est indiqué entre parenthèses.

ANNEXE L

**Fréquence et pourcentage¹⁰⁰ de réussite aux items de la question 15 du prétest
en fonction des trois groupes-classes et des élèves sélectionnés**

Items de la question 15	OR1 (23 élèves)	OR2 (25 élèves)	AS (12 élèves)
A - 4 sur 8 cercles sont noircis	Classe : 23 (100 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 24 (96 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 11 (92 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)
B - 1/4 d'un rectangle partitionné également	Classe : 23 (100 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe 10 (83 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)
C - Cercle partitionné en 4 parties inégales dont l'une est noircie	Classe : 21 (93 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 21 (84 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 8 (67 %) ÉS : E7, E9 (67 %)
D – 1/4 d'une collection discrète de 4 cercles	Classe : 23 (100 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe 9 (75 %) ÉS: E7, E8, E9 (100 %)
E - 1/4 d'un rectangle partitionné également en 8 parties.	Classe : 15 (65 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 15 (60 %) ÉS : E5, E6 (67 %)	Classe : 3 (25 %) ÉS : E8, E9 (67 %)
F - 1/4 d'un rectangle partagé en 6 parties inégales	Classe : 14 (61 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 15 (60 %) ÉS : E5, E6 (67 %)	Classe : 5 (42 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)
G - 1/4 d'une collection de 8 cercles.	Classe : 19 (83 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 21 (84 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 1 (9 %) ÉS : E7 (33 %)

Légende

ÉS : Élèves sélectionnés

¹⁰⁰ Notons que la transformation en pourcentages sur un effectif aussi petit que 3 (pour les élèves sélectionnés) n'est utilisée que pour faciliter la comparaison avec le taux de réussite du groupe d'appartenance. Notons, de plus, que les pourcentages sont arrondis à l'unité près.

ANNEXE M

Fréquence et pourcentage¹⁰¹ de réussite aux items de la question 2 du prétest en fonction des trois groupes-classes et des élèves sélectionnés

Fractions à comparer	OR1 (23 élèves)	OR2 (25 élèves)	AS (12 élèves)
8/7 7/8	Classe : 20 (87 %) ÉS : E3 (33 %)	Classe : 20 (80 %) ÉS : E6 (33 %)	Classe : 6 (50 %) ÉS : aucun (0 %)
3/15 15/3	Classe : 18 (78 %) ÉS : E3 (33 %)	Classe : 23 (92 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 7 (58 %) ÉS : E8 (33 %)
5/9 4/9	Classe : 19 (83 %) ÉS : E3 (33 %)	Classe : 21 (84 %) ÉS : E6 (33 %)	Classe : 7 (58 %) ÉS : E8 (33 %)
15/8 13/8	Classe : 20 (87 %) ÉS : E1, E3 (67 %)	Classe : 21 (84 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 8 (67 %) ÉS : E9 (33 %)
1/13 1/9	Classe : 23 (100 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 24 (96 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 4 (33 %) ÉS : E7, E8 (67 %)
6/7 6/10	Classe : 20 (87 %) ÉS : E2, E3 (67 %)	Classe : 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 5 (42 %) ÉS : E7, E8 (67 %)
11/7 11/9	Classe : 20 (87 %) ÉS : E2, E3 (67 %)	Classe : 21 (84 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 5 (42 %) ÉS : E7, E8 (67 %)
4/5 16/17	Classe : 7 (30 %) ÉS : E1 (33 %)	Classe : 13 (52 %) ÉS : E4 (33 %)	Classe : 7 (58 %) ÉS : E9 (33 %)
37/40 47/50	Classe : 6 (26 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 10 (40 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 8 (67 %) ÉS : E9 (33 %)

Légende

ÉS : Élèves sélectionnés

¹⁰¹ Notons que la transformation en pourcentages sur un effectif aussi petit que 3 (pour les élèves sélectionnés) n'est utilisée que pour faciliter la comparaison avec le taux de réussite du groupe d'appartenance. Notons, de plus, que les pourcentages sont arrondis à l'unité près.

ANNEXE N

**Fréquence et pourcentage¹⁰² de réussite aux items de la question 3 du prétest
en fonction des trois groupes-classes et des élèves sélectionnés**

		OR1 (23 élèves)	OR2 (25 élèves)	AS (12 élèves)
1/3	3/9	Classe : 23 (100 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 1 (8 %) ÉS : aucun (0 %)
	7/9	Classe : 22 (96 %) ÉS : E2, E3 (67 %)	Classe : 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 12 (100 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)
	4/12	Classe : 19 (83 %) ÉS : E3 (33 %)	Classe : 23 (92 %) ÉS : E5, E6 (67 %)	Classe : 0 (0 %) ÉS : 0 (0 %)
	3/5	Classe : 21 (91 %) ÉS : E2, E3 (67 %)	Classe : 25 (100 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 6 (50 %) ÉS : E7 (33 %)
2/5	6/15	Classe : 17 (74 %) ÉS : E1, E2 (67 %)	Classe : 19 (76 %) ÉS : E4 (33 %)	Classe : 0 (0 %) ÉS : 0 (0 %)
	4/10	Classe : 20 (87 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 20 (80 %) ÉS : E6 (33 %)	Classe : 1 (8 %) ÉS : aucun (0 %)
	3/6	Classe : 21 (91 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 22 (88 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 6 (50 %) ÉS : E7 (33 %)
	7/10	Classe : 20 (87 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 22 (88 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 12 (100 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)
4/2	2/4	Classe : 22 (96 %) ÉS : E2, E3 (67 %)	Classe : 23 (92 %) ÉS : E4, E5, E6 (100 %)	Classe : 2 (17 %) ÉS : aucun (0 %)
	2	Classe : 19 (83 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 16 (64 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 0 (0 %) ÉS : 0 (0 %)
	10/5	Classe : 9 (39 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 8 (32 %) ÉS : aucun (0 %)	Classe : 0 (0 %) ÉS : 0 (0 %)
	8/4	Classe : 19 (83 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 20 (80 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 0 (0 %) ÉS : 0 (0 %)
	8/6	Classe : 21 (91 %) ÉS : E1, E2, E3 (100 %)	Classe : 23 (92 %) ÉS : E4, E6 (67 %)	Classe : 12 (100 %) ÉS : E7, E8, E9 (100 %)

Légende

ÉS : Élèves sélectionnés

¹⁰² Notons que la transformation en pourcentages sur un effectif aussi petit que 3 (pour les élèves sélectionnés) n'est utilisée que pour faciliter la comparaison avec le taux de réussite du groupe d'appartenance. Notons, de plus, que les pourcentages sont arrondis à l'unité près.

ANNEXE O

Extrait de verbatim tiré du groupe AS illustrant les difficultés relatives à la décontextualisation des connaissances au moment de la troisième situation

Les élèves doivent identifier, parmi les fractions suivantes, celles qui sont équivalentes : $3/6$, $5/10$, $2/4$, $6/9$, $4/6$, $2/3$, $3/9$, $5/15$, $2/6$.

EXP : Est-ce que parmi ces fractions-là, il y a des fractions qui sont équivalentes, qui représentent la même chose ?

E8 : Celle-là (elle en montre juste une).

EXP: Oui, $5/15$... Et elle serait équivalente à quelle fraction selon toi ? (2 secondes) Est-ce qu'il y a une autre fraction, selon toi, qui veut dire la même chose que $5/15$?

E8 : Heu... Ben, celle-là ($5/10$).

EXP: Selon toi, $5/15$ et $5/10$, c'est équivalent, c'est la même chose ? (2 secondes) Si t'as 5 pots de rouge et 15 pots de blanc, est-ce que ça va donner le même rose que si t'as 5 pots de rouge et 10 pots de blanc ?

E8 : Non, c'est pas la même affaire.

EXP: Donc, c'est pas des fractions équivalentes.

(7 secondes : les trois élèves semblent chercher.)

E9 : Attends là, je vais en trouver une !

E8 : Ah ! Celle-là pis celle-là ($2/3$ et $2/6$) ! (Elle semble sûre d'elle.)

EXP: 2 pots de rouge avec 3 pots de blanc, est-ce que ça donne la même couleur que 2 pots de rouge avec 6 pots de blanc ?

E8 : Ah non...

E9 : Je vais te trouver ça là...

(3 secondes)

E8 : Ah ! Celle-là pis celle-là !

EXP: $3/9$ pis $6/9$. Qu'est-ce que vous en pensez les autres; $3/9$ et $6/9$, est-ce que c'est équivalent ?

E9 : Non.

EXP: Non, c'est comme si on mettait la même quantité de peinture blanche, parce que les deux fractions ont le même dénominateur, mais qu'on ne mettait pas la même quantité

de peinture rouge.

E7 : Ceux-là (5/10 et 5/15) ?

E8 : Non, je l'ai essayé tantôt.

EXP: OK, regardez bien ici. (Elle prend la feuille avec les pots de peinture.) Tantôt, on a vu que quand on a 4 blancs pour 2 rouges, ça donne le même rose que 6 blancs pour 3 rouges, parce qu'on a 2 blancs pour 1 rouge dans les deux mélanges. Ça va ça ?

E8 et E9 : Oui.

EXP: On aurait pu écrire ça comme ça : 4 blancs pour 2 rouges (elle écrit 4/2), c'est de la même couleur que (elle écrit =) 6 blancs pour 3 rouges (elle écrit 6/3). On n'a pas la même quantité de peinture, mais on peut dire que c'est équivalent parce qu'on obtient le même rose, parce que le rapport est le même : on a 2 blanc pour 1 rouge dans les deux cas. Si on prend ces fractions-là (elle prend 5/10 et 5/15) : 5/10, on pourrait dire 5 rouges pour 10 blancs, est-ce que ça va faire le même rose que 5 rouges pour 15 blancs (en pointant 5/15) ?

E7 : Non.

EXP: Si on n'obtient pas le même rose, ça veut dire que ce ne sont pas des fractions équivalentes.

E9 : Moi je le sais, celle-là pis celle-là (2/6 et 4/6).

BIBLIOGRAPHIE

- Adjage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de doctorat, Strasbourg, Université Louis Pasteur.
- Archambault, J., Richer, C. (2005). « Tenir compte des différences ». *Vie pédagogique*. Revue 136. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Artigue, M. (1988). « Ingénierie didactique ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 9, n°3, p. 281-308.
- Artigue, M. (1996). « Ingénierie didactique ». Dans J. Brun. *Didactique des mathématiques*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- Artigue, M. (2002). « Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? ». *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes*. N°8, p. 59-72.
- Association des orthopédagogues du Québec (2003). *L'acte orthopédagogique dans le contexte actuel*. Mémoire préparé par l'Association des Orthopédagogues du Québec. Montréal : Association des Orthopédagogues du Québec.
- Assude, T., Perez, J.M., Suau, G., Tambone, J., Vérillon, A. (2014). « Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas ». *Recherche en didactique des mathématiques*. Vol. 34, n°1, p.33-58.
- Aubé, M. (2005). « Promenade au jardin des nombres ». *Vie pédagogique*. Revue 136. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Barallobres, G. (2015). *Difficultés en mathématiques, difficultés d'abstraction : des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage*. Document inédit. Montréal : UQAM.
- Battut, E., Bensimon, D. (2006). *Comment différencier la pédagogie*. Paris : Retz.
- Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris: Éditions du Seuil.
- Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., Silver, E.A. (1983). "Rational Number Concepts". Dans R.Lesh et M. Landau. *Acquisition of Mathematics Concepts and processes*. New-York: Academic Press, p. 91-126.
- Behr, M.J., Harel, G., Lesh, R., Post, T.R. (1993). "Rational Numbers : Towards a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct" Dans T.P. Carpenter, E. Fennema et T.A. Romberg. *Rational Numbers : An Integration of Research*. Hillsdales, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p.13-47.

- Béliveau, M.-C. (2007). « Jouer notre rôle aujourd'hui... oui, mais comment? ». *La revue de l'ADOQ*. Vol. 18, n°1, p. 7-10.
- Berch, D., Mazzocco, M. (2007). *Why is Math So Hard for Some Children ?* Baltimore : Éditions Brookes.
- Bertrand-Poirier, D. (2007). « Pour une meilleure intégration de la gestion mentale... ». *La revue de l'ADOQ*. Vol. 18, n°2, p. 14-18.
- Bissonnette, S., Richard, M., Gauthier, C., Bouchard, C. (2010). « Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire ? Résultats d'une méga-analyse ». *Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage*. Vol. 3, article 1, p. 1-35.
- Bkouche, R., Rouche, N., Charlot, B. (1992). *L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques*. Paris : Armand Colin.
- Bloch I., Salin, M.H. (2004). « Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS ». *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*. Paris : Université Paris 7, p.171-186.
- Blouin, P. (1993). *Enseignement de la notion de fraction à des élèves de 1ère secondaire en difficulté d'apprentissage*. Thèse de doctorat, Montréal, Université de Montréal.
- Blouin, P. (1999). « Pour mieux comprendre la construction des nombres rationnels ». Dans G. Lemoyne et F. Conne. *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les presses de l'Université de Montréal.
- Blouin, P., Lemoyne, G. (2002). « L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage : une approche didactique de la rééducation et ses effets ». *Petit x*. N°58, p.7-23.
- Bottge, B.A. (2001). "Reconceptualizing Mathematics Problem Solving for Low-Achieving Students". *Remedial and special education*. Vol. 22, n°2, p.102-112.
- Bourque, J. (2007). « Le point de concentration... ». *La revue de l'ADOQ*. Vol. 19, n° 1, p. 24-25.
- Boutin, G., Daneau, C. (2004). *Réussir, prévenir et contrer l'échec scolaire*. Montréal : Éditions nouvelles AMS.
- Brodeur, M., Dion, É., Mercier, J., Laplante, L. Bournot-Trites, M. (2008). « Amélioration du français : mobiliser les connaissances pour prévenir les difficultés d'apprentissage en lecture ». *Éducation Canada*. Vol. 48, p. 10-13.

- Brousseau, G., Warfield, V. (1981). *Le cas de Gaël*. Bordeaux : Université de Bordeaux, IREM.
- Brousseau, G. (1986a). « La relation didactique: Le milieu ». *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques*. Paris : IREM de Paris 7, p. 54-68.
- Brousseau, G. (1986b). « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 7, n°2, p. 33-115.
- Brousseau, G., Brousseau, N. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
- Brousseau, G. (1988). « Les différents rôles du maître ». *Bulletin de l'A.M.Q.* Vol. 28, n°2, p. 14-24.
- Brousseau, G. (1990). « Le contrat didactique : Le milieu ». *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. Vol. 9, n°3, p.308-336.
- Brousseau, G., Centeno, J., (1991). « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 11, n°2.3, p.167-210.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2002). « Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques ». *Revue du Centre de Recherches en Éducation*. Publications de l'Université de Saint-Étienne. N°22-23, p.83-155.
- Brownell, M.T., Mellard, D.F., Deshler, D.D. (1993). "Differences in the learning and transfer performances between students with learning disabilities and other low-achieving students on problem-solving tasks". *Learning Disability Quarterly*. Vol. 16, p.138-156.
- Bruer, J. T. (1997). "Education and the Brain: A Bridge Too Far". *Educational Researcher*. Vol. 26, n°8, p.4-16.
- Bruyère, Y. (2011). « Conditions sociocognitives de la conceptualisation dans les échanges entre élèves ». *Grand N*. N°88, p. 67-82.
- Büchel, F.P., Büchel, P. (1995). *Découvrez vos capacités, réalisez vos possibilités, planifiez votre démarche, soyez créatifs: DELF, un programme d'apprentissage pour adolescents et adultes comprenant des exercices et des textes*. Russin/GE: Centre d'Education Cognitive.
- Butlen, D., Pézard, M. (2003). « Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation ». *Recherche en didactique des mathématiques*. Vol. 23, n°1, p. 1-40.

- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Université de Franche-Comté : Presses universitaires de Franche-Comté.
- Cange, C., Favre, J.-M. (2003). « L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs ? ». *Éducation et francophonie*. Vol. XXXI, n°2, p. 199-217.
- Cartier, S., Debeurme, G., Viau, R. (1997). « La motivation et les stratégies autorégulatrices : cadre de référence ». Dans L. Sauvé et coll. *Deuxième rapport trimestriel de progrès des activités de recherche du projet. Formation professionnelle sur l'inforoute : Structuration du système*. Québec : Société pour l'apprentissage à vie, p. 33-45.
- Charalambos, Y., Charalambous Pitta-Pantazi, D. (2007). "Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 64, n°3, p. 293-316.
- Charles, K., Nason, R. (2000). "Young children's partitioning strategies". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 43, p. 191-221.
- Cherel, C., Giroux, J. (2002). « Intégration d'élèves en difficulté : une problématique didactique ». *Revue Instantanés Mathématiques*. Vol. XXXIX, p. 37-48.
- Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire... le temps des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique.
- Chevalier, M.C. (1992). « Situations d'apprentissage, actions et rétroactions : une expérience en CP ». *Grand N*. N°51, p. 25-49.
- Clarke, M.D., Roche, A. (2009). "Students fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 72, p. 127-138.
- Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones (2007). *Rôles et fonctions des enseignants orthopédagogues et des professionnels orthopédagogues*. Tiré du site <http://www.cpn.gouv.qc.ca/index.php?id=13>
- Comité provincial de l'enfance exceptionnelle (COPEX) (1976). *L'éducation de l'enfance en difficulté d'adaptation et d'apprentissage au Québec*. Québec: Service général des communications du Ministère de l'Éducation.
- Conne, F. (1992). « Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique ». *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol. 12, n°2, p. 221-270.
- De la Garanderie, A. (1982). *Pédagogie des moyens d'apprendre*. Paris : Éditions Centurion.

- De la Garanderie, A. (1984). *Le dialogue pédagogique avec l'élève*. Paris : Éditions Centurion.
- De la Garanderie, A. (1990). *Pour une pédagogie de l'intelligence*. Paris : Éditions Centurion.
- Demont, É. (2009). *La psychologie*. Paris : Éditions Sciences humaines.
- Desjardins, M., Héту, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.
- Diénès, Z. (1970). *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques*. Paris : O.C.D.L.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat, Paris, Université Paris 7.
- Dubar, C. (1994). « Identités collectives et individuelles dans le champ professionnel ». *Traité de sociologie du travail*. Bruxelles : De Boeck.
- Empson, S.B., Junk, D., Dominguez, H., Turner, E. (2006). "Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children's thinking". *Educational Studies in Mathematics*. September 2006, vol. 63, p. 1-28.
- Englert, C.S., Culatta, B.E., Horn, D.G. (1987). "Influence of irrelevant information in addition word problems on problem solving". *Learning Disability Quarterly*. Vol. 10, p. 29-36.
- Expertise collective (2007). *Dyslexie, dysorthographe, dyscalculie : bilan des données scientifiques*. Paris : Inserm.
- Favre, J.-M. (1997). « L'échec, le temps et la multiplication ». *Mémoire de licence inédit*. Université de Genève, p. 198-202.
- Favre, J.-M. (2004). « Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé ». Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : ARDM et IREM, p. 109-126.
- Fayol, M., Monteil, J.-M., (1994). « Stratégies d'apprentissage et apprentissage de stratégies ». *Revue Française de Pédagogie*. N° 106, p. 91-110.
- Fayol, M., Fluss, J., Sacchet, J., Siclier, J., Mirassou, A., Billard, C. (2009) « Associations et dissociations en lecture et mathématiques ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 145-151.

- Feuerstein, R., Hoffman, M.B. (1995). « Conflit inter-génération des droits: imposition culturelle et réalisation de soi ». Dans F.P. Büchel. *L'Education cognitive, le développement de la capacité d'apprentissage et son évaluation*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, p. 103-134.
- Filion, M., Goupil, G. (1995). « Description des activités quotidiennes d'orthopédagogues ». *Revue canadienne de l'éducation*. Vol. 20, n°2, p. 225-238.
- Fischer, J-P. (2009a). « Présentation du dossier dyscalculie développementale ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 115-116.
- Fischer, J-P. (2009b). « Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 117-134.
- Flessas, J., Lussier, F. (1995). *Épreuve de simultanéité verbale : les styles cognitifs en quatre quadrants*. Montréal : Service des publications de l'Hôpital Ste-Justine.
- Francoeur, P. (2005). « Jongler avec les nombres sur les traces de Pythagore ». *Vie pédagogique*. Revue 136. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Freudenthal, H. (1968). "Why to Teach Mathematics so as to Be Useful?". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 1, p. 3-8.
- Fushs, L.S., Fuchs, D. (2007). "A model for implementing responsiveness to intervention". *Teaching Exceptional Children*. Vol. 39, n° 5, p. 14-20.
- Ghailane, O. (2015). *Les connaissances sur les fractions d'élèves de troisième cycle du primaire*. Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.
- Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed*. New York : Basic Books.
- Geary, D.C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., DeSoto, M.C. (2004). "Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability". *Journal of Experimental Child Psychology*. Vol. 88, p. 121-151.
- Gelman, R., Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Gervais, C., Desrosiers, P. (2001). « Les stages : un parcours professionnel accompagné ». *Canadian Journal of Education*. Vol. 26, n° 3, p. 263-282.
- Ghailane, O. (2015). *Les connaissances sur les fractions d'élèves de troisième cycle du primaire*. Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.
- Giasson, J. (1990). *La compréhension en lecture*. Boucherville : Gaëtan Morin Éditeur.
- Giroux, J., René De Cotret, S. (2001). « Le temps didactique en classe de doubleurs ». *Actes de l'AFDEC*. Montréal : Université de Montréal, p. 41-72.
- Giroux, J. (2004). « Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire ». *Langage et Mathématiques : Revue des sciences de l'éducation*. Vol. 30, n° 2, p. 561-589.
- Giroux, J., Ste-Marie, A. (2007). « Maillage de situations didactiques dans des classes d'adaptation scolaire ». Dans J. Giroux et D. Gauthier. *L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique.
- Giroux, J. (2007). « Adapter l'enseignement en classe d'adaptation scolaire? (La TSD à la rescousse des difficultés d'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage) ». *Entre didactique et politique : Actualités de la Théorie des Situations Didactiques à propos de quelques questions vives sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Bordeaux : Symposium Bordeaux 2.
- Giroux, J. (2008). « Conduites atypiques d'élèves du primaire ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 28, n°1, p. 9-62.
- Giroux, J. (2010). « Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage ». *Actes du colloque du GDM*. Moncton : Université de Moncton, p. 148-158.
- Giroux, J. (2011). « L'investigation didactique des connaissances : le cas des fractions ». *Conférence au Journées du groupe DDMES*, Société suisse de didactique des mathématiques.
- Giroux, J. (2013). « Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire: Problématique et repères didactiques ». *Éducation et didactique*. Vol. 7, n° 1, p. 59-86.
- Gómez Chacón, I.M., Figueiral, L. (2007). « Identité et facteurs affectifs dans l'apprentissage des mathématiques ». *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. 12, p. 117-146.
- Gould, S. J. (1997). *La mal-mesure de l'homme*. Paris : Éditions Odiles Jacob.

- Helayel, J., Causse-Mergui, I. (2011). *100 idées pour aider les élèves « dyscalculiques » et tous ceux pour qui les maths sont une souffrance*. Paris : Éditions Tom Pousse.
- Hersant, M. (2014). « Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 34, n° 1, p. 9-31.
- Horth, R. (2000). *Historique de l'adaptation scolaire au Québec*.
Tiré du site : http://www.adaptationscolaire.org/themes/fs_themes.htm
- Jackson, B. (2002). "Crossing Content: A strategy for Students with Learning Disabilities". *Intervention in School and Clinic*. Vol. 37. n° 5, p. 279-282.
- Jordan, N.C., Hanich, L.B., Kaplan, D. (2003). "A longitudinal Study of Mathematical Competencies in Children With Specific Mathematics Difficulties Versus Children With Comorbid Mathematics and Reading Difficulties". *Child Development*. Vol. 74, n° 3, p. 834-850.
- Kieren, T.E. (1976). "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations or rational numbers". Dans R. Lesh. *Number and Measurement: Papers form a Research Workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T.E. (1980). "The rational number construct- Its element and mechanism". Dans T.E. Kieren. *Recent Research on Number Learning*. Colombus, Ohio: ERIC Claringhouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Kieren T.E. -(1989). "Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development". Dans J. Hiebert et M. Behr. *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, Virginia: Editions Lawrence Erlbaum, p. 162-181.
- Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Dosch, M., Martin, E., Von Aster, M. (2006). "Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: a functional MRI study." *Behavioral Brain Function*. Vol. 2, n° 1.
- Kuzniak A., Parzysz, B., Vivier, L., Bulf, C., Chambris, C., Colomb, J., Denys, B., Houdement, C., Mesquita, A., Ouvrier-Buffet, C., Perrin-Glorian, M.-J., Pluvinaige, F., Pressiat, A., Romo-Vázquez, A. (2008). *Du monde réel au monde mathématique – Un parcours bibliographique et didactique*. Paris : IREM de Paris 7.
- Labrie, C., Lucas, M., R.Lerous, J. (2007). « Comment reconnaître et comprendre l'élève qui souffre d'un TDAH ». *La revue de l'ADOQ*. Vol. 18, n°2, p. 9-11.
- Lafortune, L. (1992). *Dimension affective en mathématiques: recherche-action et matériel didactique*. De Boeck Université.

- Lamon, S.J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New-York: Éditions Routledge (seconde édition).
- Laplante, L. (1998). « Diagnostic de la dyslexie de développement : y a-t-il une place pour l'orthopédagogie? ». *Congrès de l'Association québécoise pour les troubles d'apprentissage (AQETA)*. Montréal.
- Laplante, L. (2007). « De la spécificité de l'orthopédagogie ou le rôle du chaînon manquant... ». *La revue de l'ADOQ*. Vol. 18, n° 2, p. 3-6.
- Laverdure, G. (2005). « Les différentes portes d'entrée en maths ». *Vie pédagogique*. Revue 136. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Lemoyne, G., Lessard, G. (2003). « Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants ». *Éducation et francophonie*. Volume XXXI, n°2.
- Lepage, C. (2009). « Avant j'étais TED, maintenant je suis fier... ». *Vie pédagogique*. Revue 150. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Luria, A. (1973). *The working brain. An introduction to neuropsychology*. New York : Penguin Books.
- Lussier, F., Flessas, J. (2001). *Neuropsychologie de l'enfant, troubles développementaux et de l'apprentissage*. Paris : Dunod.
- Lyons, I.M., Beilock, S.L. (2012). "When Math Hurts: Math Anxiety Predicts Pain Network Activation in Anticipation of Doing Math". *PLoS ONE* 7(10): e48076. DOI:10.1371/journal.pone.0048076
- Marchand, C. (2005). « À la mesure de notre héritage ». *Vie pédagogique*. Revue 136. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Masson, S. (2007). « Enseigner les sciences en s'appuyant sur la neurodidactique des sciences ». Dans P. Potvin, M. Riopel et S. Masson. *Regards multiples sur l'enseignement des sciences*. Québec: Éditions MultiMondes.
- Mary, C. (2003). « Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique ». *Éducation et francophonie*. Vol. XXXI, n° 2, p. 103-124.
- Matheron, Y., Noirfalise, R. (2002). « L'aide individualisée : entre système didactique auxiliaire inutile et déficit d'analyse didactique entravant son efficacité et son développement ». *Petit x*. N° 60, p. 60-82.

- Mazzocco, M.M.M., Myers, G.F. (2003). "Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years". *Annals of Dyslexia*. Vol. 53, n° 1, p. 218-253.
- McCloskey, M., Caramazza, A., Basili, AG. (1985). "Cognitive mechanism in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia". *Brain and Cognition*. Vol. 4, p. 171-196.
- Meirieu, P. (1985). *L'école, mode d'emploi. Des méthodes actives à la pédagogie différenciée*. Paris : ESF.
- Mercier, A. (1995). « Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques ». *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Merri, M., Pichat, M. (2007). *Psychologie de l'éducation : Tome 1, L'école*. Éditions Bréal.
- Middleton, J. A., De Silva, T., Toluk, Z., Mitchell, W. (2001). "The Emergence of Quotient Understandings in a Fifth-Grade Classroom: A Classroom Teaching Experiment." Dans R.S. Speiser et C. Maher. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Snowbird (UT): ERIC, p. 263-271.
- Ministère de l'Éducation du Québec (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves. Politique de l'adaptation scolaire*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Montague, M. (1992). "The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities". *Journal of Learning Disabilities*. Vol. 23, p. 230-248.
- Montague, M. (1996). "Student perception, mathematical problem solving, and learning disabilities". *Remedial and Special Education*. Vol. 18, n° 1, p. 46-53.
- Montague, M. (1997). "Effectiveness of Solve it". *Journal of Learning Disabilities*. Vol. 30, p. 164-177.
- Montague, M., Warger, C., Morgan, T.H. (2000). "Solve it. Strategy Instruction to Improve Mathematical Problem Solving". *Learning Disabilities Research and Practice*. Vol. 15, n° 2, p. 110-116.

- Moseley, B. (2005). "Students' early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 60, p. 37-69.
- National Council of Teachers of Mathematics (1964). *Rational Number*. Document. Traduction effectuée par l'AMQ.
- Ni, Y. (2001). "Semantic Domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence". *Contemporary Educational Psychology*. Vol. 26, p. 400-417.
- Parmar, R.S., Cawley, J.F. (1991). "Challenging the routines and passivity that characterize arithmetic instruction for children with mild handicaps". *Remedial and Special Education*. Vol. 12, n° 5, p. 23-32.
- Perrenoud, P. (1995). *La fabrication de l'excellence scolaire : du curriculum aux pratiques d'évaluation*. Genève : Droz (seconde édition).
- Perrenoud, P. (1997). *Pédagogie différenciée : des intentions à l'action*. Paris : ESF.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993). « Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 1.2, n° 13, p. 5-118.
- PISA (2009). *Le cadre d'évaluation de PISA 2009 : Les compétences clés en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences*. Éditions OCDE.
- Polya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Éditions Jacques Gabais, 2^e édition.
- Przesmycki, H. (2004). *La pédagogie différenciée*. Paris : Hachette éducation.
- René De Cotret, S., Giroux, J. (2003). « Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts) : La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire ». *Éducation et francophonie*. Vol. XXXI, n° 2.
- Rioux, M. (2003). *Les pratiques sociales didactisées relatives aux fractions dans les manuels québécois utilisés pour l'enseignement des mathématiques en sixième année*. Rimouski : Université du Québec à Rimouski.
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en S.E.G.P.A.* Thèse de doctorat, Bordeaux, Université de Bordeaux.
- Roiné, C. (2015). « La fabrication de l'élève en difficulté ». *Éducation et socialisation*. En ligne, 37, consulté le 23 juin 2015. URL : <http://edso.revues.org/1138>.

- Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.
- Rousselle, L., Noël, M.-P. (2007). "Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities : A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing." *Cognition*. N° 102, p. 361-395.
- Sackur, C., Maurel, M. (2002). « La presque île, une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG ». *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 167-177.
- Salin, M.-H. (2002). « Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations ». *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 111-124.
- Salin, M.-H. (2006). « Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire ». *Enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes difficiles*. Sherbrooke : Colloque EMF (Espace mathématique francophone).
- Salin, M.-H. (2007a). « À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire ». Dans J. Giroux et D. Gauthier. *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique, p. 195-217.
- Salin, M.-H. (2007b). *Contribution au symposium entre didactique et politique*. Bordeaux : Université Victor Segalen Bordeaux 2.
- Sarrasin, L. (2007a). « Les enseignants, ces porteurs de changement ». *Vie pédagogique*. Revue 145. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Sarrasin, L. (2007b). « Discussion sur le renouveau pédagogique : deux enseignantes partagent leur vision ». *Vie pédagogique*. Revue 145. Tiré du site <http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca>
- Sarrazy B. (2002). *Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école Élémentaire*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Bordeaux 2 : DAEST.
- Sarrazy B. (2005). « La théorie des situations : une théorie anthropologique des mathématiques ? ». *Autour de la théorie des situations. Questions, Réponses, Ouverture. Hommage à Guy Brousseau*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 375-390.
- Sarrazy, B. (2007). « Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques ». *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*. Paris : Jussieu, ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des mathématiques).

- Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Ste-Marie, A. (2013). *Évaluation qualitative du programme mathématique Fluppy*. Thèse de doctorat, Montréal, Université de Montréal.
- Strang, J.D., Rourke, B.P. (1985). "Arithmetic disability subtypes: The neuropsychological significance of specific arithmetical impairment in childhood". Dans B.P. Rourke. *Neuropsychology of learning disabilities: Essentials of subtype analysis*. New York : Guilford Press, p. 167-183.
- Streefland, L. (1987). "Free production of fraction monographs". Dans J.Bergeron, N.Herscovics et C.Kieran. *Proceedings of the Eleventh International Conference of Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, p. 405-410.
- Streefland L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education : A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers.
- Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Les Éditions Logiques.
- Toluk, Z. (1999). *The development of childrens' understanding of the quotient subconstruct of rational number*. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University.
- Trépanier, N. (2008). « L'orthopédagogue : un rôle clé dans la prévention et l'intervention auprès des élèves en difficulté d'apprentissage ou d'adaptation ». Dans J.-P. Martinez, G.Boutin, L. Bessette et Y. Montoya. *Prévention de l'échec scolaire*. Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Vannetzel, L., Eynard L.-A., Meljac, C. (2009). « Dyscalculie : une rencontre difficile. Étude d'une population d'enfants consultant dans un centre de référence pour troubles des apprentissages ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 135-144.
- Vaughn, S. et coll. (2007). "Prevention and early identification of students with reading disabilities". Dans D. Haager, J. Klingner et S. Vaughn. *Evidence-Based Reading Practices for Response to Intervention*. Baltimore (MD) : Paul H. Brookes Publishing, p. 11-27.
- Verba, M. (1999). « L'analyse des dynamiques interactives dans la construction des savoirs chez les jeunes enfants ». Dans M. Gilly, J.-P. Roux et A. Trognon. *Apprendre dans l'interaction*. Nancy : Presses universitaires de Nancy.
- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Éditions Peter Lang.

- Vigier, M. (2009). « Les élèves en grande difficulté en maths : sont-ils dyscalculiques et peuvent-ils bénéficier d'une approche du calcul par tableaux et tableurs? ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 171-178.
- Vilette, B. (2009). « L'Estimateur : un programme de remédiation des troubles du calcul ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 165-170.
- Von Aster, M.G. (2009). « Le problème de la comorbidité dans les troubles du calcul ». Dans *La dyscalculie développementale*. Revue de neuropsychologie du développement et des apprentissages. Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (A.N.A.E.). Vol. 21, n° 102, p. 152-157.
- Vonèche, J., Parrat-Dayana, S. (1994). « La partie, le tout et l'équilibration ». *Philosophica*. Vol. 54, n° 2, p. 9-42.
- Weinstein, C.E. (1994). « Strategic learning and strategic teaching : Flip sides of a coin ». Dans P. R. Pintrich, D. R. Brown et C. E. Weinstein. *Student, Motivation, Cognition, and Learning : Essays in Honor of Wilbert J. McKeachie*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p. 257-274.
- Zentall, S.S., Ferkis, M.A. (1993). "Mathematical problem solving for children with ADHD, with and without learning disabilities". *Learning Disability Quarterly*. Vol. 16, p. 6-18.